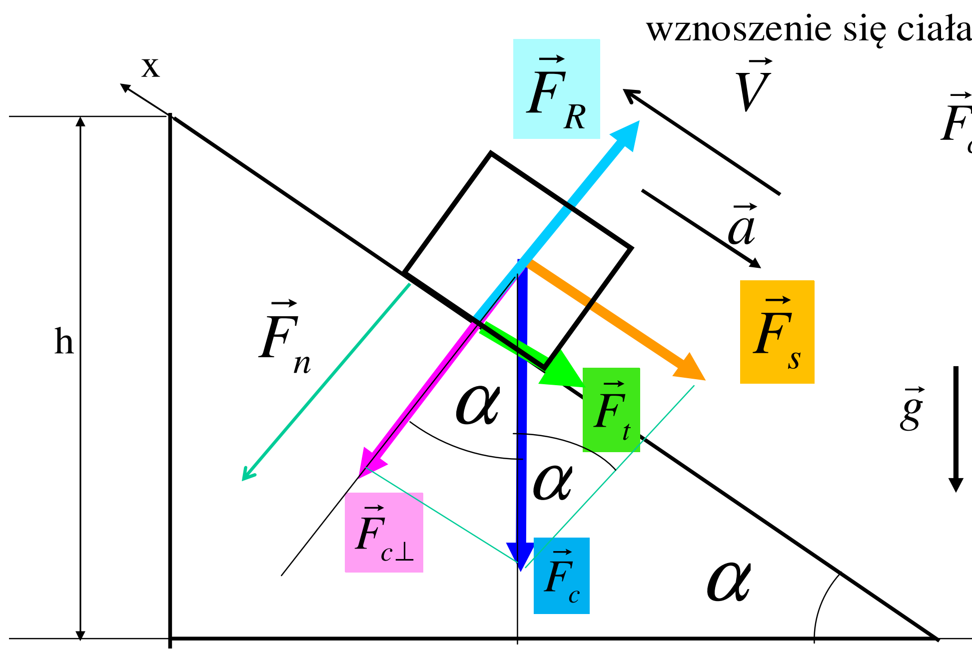
Zad. 4 (seria II). Jaką minimalną szybkość początkową V_0 należy nadać ciału o masie m znajdującemu się u podnóża równi pochyłej, aby wzniosło się na szczyt równi pochyłej? Obliczyć czas trwania ruchu ciała z tą szybkością początkową. Znana jest wysokość równi h, kąt nachylenia równi do poziomu α, współczynnik tarcia ciała o równię μ oraz wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Wsk. Ciało porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. Szybkość początkowa musi być tak dobrana by po osiągnięciu szczytu równi jego szybkość zmalała do zera.

Dane: h,α,g,μ Szukane: V_0, t_w=?

Zwrot siły tarcia przeciwny niż przy zsuwaniu się

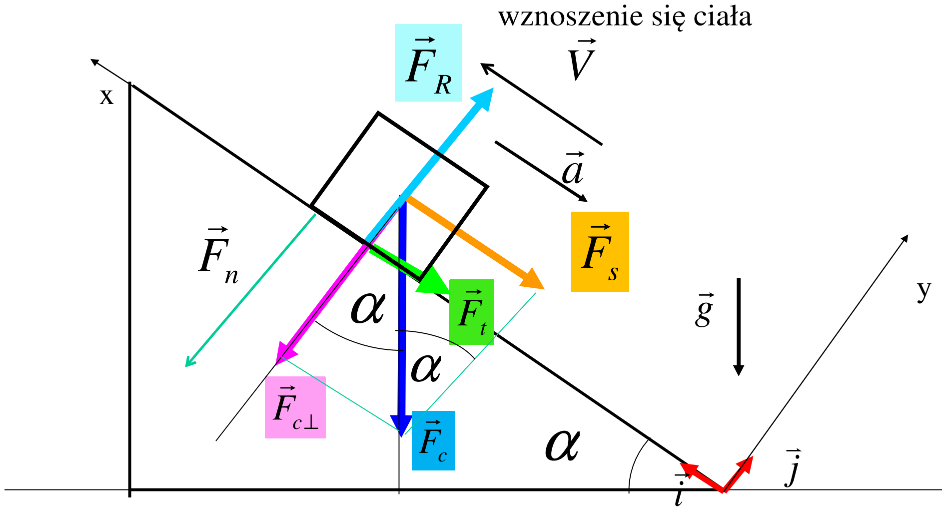
$$\vec{F}_w = \vec{F}_c + \vec{F}_R + \vec{F}_t$$



$$\vec{F}_c = \vec{F}_s + \vec{F}_{c\perp} \Rightarrow \vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R + \vec{F}_t$$

$$F_{c\perp} = \left|\vec{F}_{c\perp}\right| = \left|\vec{F}_c\right| \cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)$$

$$F_s = \left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}_c\right| \sin(\alpha) = mg\sin(\alpha)$$



Zwrot osi Ox wzdłuż równi do góry

$$\vec{F}_w = \vec{F}_s + \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_R + \vec{F}_t$$

$$\vec{F}_s = -F_s\vec{i} \qquad \vec{F}_t = -F_t\vec{i}$$

$$\vec{F}_{c\perp} = -F_{c\perp}\vec{j} \qquad \vec{F}_R = F_R\vec{j}$$

$$\vec{F}_w = \left(-F_s - F_t\right)\vec{i} + \left(F_R - F_{c\perp}\right)\vec{j}$$

$$F_{wx} = -F_s - F_t \qquad F_{wy} = F_R - F_{c\perp}$$

$$\vec{F}_w = \vec{F}_{w\|} + \vec{F}_{w\perp} = F_{wx}\vec{i} + F_{wy}\vec{j}$$

Rzut siły wypadkowej na kierunek styczny do zbocza równi

Rzut siły wypadkowej na kierunek prostopadły do zbocza równi

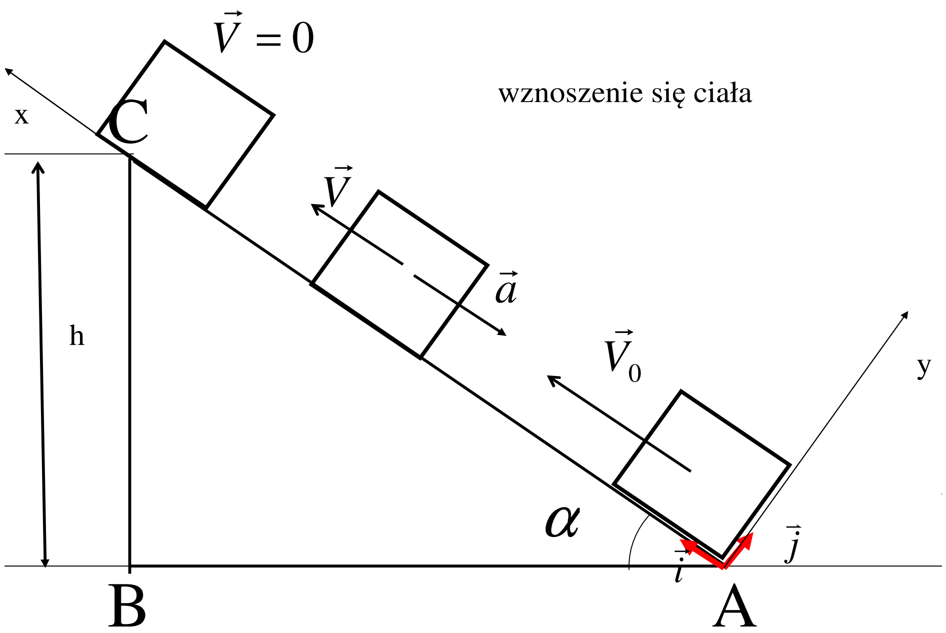
Przy ruchu prostoliniowym przyspieszenie styczne do toru ruchu czyli zbocza równi

$$\Rightarrow \vec{a}_\perp = a_y\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{w\perp} = F_{wy}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_R + \vec{F}_{c\perp} = 0 \Rightarrow \vec{F}_R = -\vec{F}_{c\perp} \Rightarrow \boxed{F_R = F_{c\perp}}$$

$$F_{wy} = 0$$

$$\boxed{F_t = \mu F_R} = \mu F_{c\perp} = \mu m g \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\| = a_x\vec{i} = \frac{\vec{F}_{w\|}}{m} = \frac{F_{wx}}{m}\vec{i} \Rightarrow a_x = \frac{F_{wx}}{m} = -\frac{F_s + F_t}{m} = -\frac{mg\sin(\alpha) + mg\cos(\alpha)\mu}{m} = -g\left(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\right)$$



$$\vec{a}=\vec{a}_{\parallel}=a_x\vec{i}$$

$$a_x=-g(\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha))=const<0$$

$$\vec{V}=V_x\vec{i} \qquad V_x=\left|\vec{V}\right|=V>0$$

$\Rightarrow$ Ruch jednostajnie opóźniony

$$V=V_0-a_{op}t \qquad S=V_0t-\frac{1}{2}a_{op}t^2$$

gdzie $a_{op}=\left|\vec{a}\right|=-a_x=g(\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha))$

$$V_0=V(t=0)$$

Minimalna szybkość jaka należy nadać ciału u podstawy równi aby wniosło się ono na szczyt równi odpowiada przypadkowi w którym jego prędkość na szczycie równi, którą osiąga ono po pewnym czasie t_w, spada do zera

$$V(t=t_w)=0=V_0-a_{op}t_w=0 \Rightarrow t_w=\frac{V_0}{a_{op}} \qquad \sin(\alpha)=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{h}{S(t=t_w)} \Rightarrow S(t=t_w)=\frac{h}{\sin(\alpha)}$$

$$S(t=t_w)=\frac{h}{\sin(\alpha)}=V_0t_w-\frac{a_{op}t_w^2}{2}=\frac{V_0^2}{a_{op}}-\frac{a_{op}V_0^2}{2a_{op}^2}=\frac{V_0^2}{a_{op}}-\frac{V_0^2}{2a_{op}}=\frac{V_0^2}{2a_{op}}$$

$$\frac{h}{\sin(\alpha)}=\frac{V_0^2}{2a_{op}} \Rightarrow \quad V_0=\sqrt{\frac{2a_{op}h}{\sin(\alpha)}}=\sqrt{\frac{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)h}{\sin\alpha}}=\sqrt{2gh(1+\mu ctg(\alpha))}$$

$$t_w=\frac{V_0}{a_{op}}=\frac{\sqrt{\frac{2a_{op}h}{\sin(\alpha)}}}{a_{op}}=\sqrt{\frac{2h}{a_{op}\sin(\alpha)}}=\sqrt{\frac{2h}{g\sin(\alpha)(\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha))}}$$