Zadanie 4 (seria II). Punkt materialny o masie m porusza się po paraboli o równaniu $y = bx^2$ (b-znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0, -mg)$.

1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Równanie więzów: $$f(x, y) = y - bx^2 = 0$$

Zapis równań Lagrange'a I rodzaju w przestrzeni dwuwymiarowej

jedno równanie więzów; $p=1$, $f_1 = f$, $\lambda_1 = \lambda$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, grad f_k \Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -2\lambda bx \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda \end{aligned}$$

Siła reakcji $$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, grad f_k \overset{p=1}{=} \lambda \, grad f = \left[\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right] = [-2\lambda bx, \lambda]$$

$$\vec{F}_R = [-2\lambda b x, \lambda]$$

Wyrażenie składowych siły reakcji jako funkcji $x, \dot{x}$

Musimy uzależnić nieoznaczony mnożnik Lagrange'a λ tylko od powyższych wielkości.

Różniczkujemy dwukrotnie równanie więzów $f(x, y) = y - bx^2 = 0$ po czasie

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{f} = -2bx\dot{x} + \dot{y} = 0$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{y}}\ddot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{f} = -2b\dot{x}^2 - 2bx\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \qquad (*)$$

Uzależniamy $\ddot{x}, \ddot{y}$ stojące w powyższym równaniu przez od x i λ korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju i wstawiamy otrzymane wyrażenia do równania (*)

$$m\ddot{x} = -2\lambda bx \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-2\lambda bx}{m}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \Rightarrow \ddot{y} = -g + \frac{\lambda}{m}$$

$$\ddot{f} = -2b\dot{x}^2 + \frac{4\lambda b^2 x^2}{m} - g + \frac{\lambda}{m} = 0$$

$$-2b\dot{x}^2+\frac{4\lambda b^2x^2}{m}-g+\frac{\lambda}{m}=0\Rightarrow\quad\frac{\lambda}{m}\left(4b^2x^2+1\right)=2b\dot{x}^2+g\Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{2mb\dot{x}^2+mg}{4b^2x^2+1}$$

$$\vec{F}_R=\left[-2\lambda bx,\lambda\right]\Rightarrow$$

$$F_{Rx}=-2\lambda bx=\frac{-4mb^2x\dot{x}^2-2mbxg}{4b^2x^2+1},F_{Ry}=\lambda=\frac{2mb\dot{x}^2+mg}{4b^2x^2+1}$$

Uzależniliśmy składowe siły reakcji działającej na ciało od wielkości $x,\dot{x}$

W szczególności składowe te w chwili czasu *t=t₀* gdy $x(t=0)=x_0,\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$

są równe

$$F_{Rx}=\frac{-4mb^2x_0\dot{x}_0^2-2mbx_0g}{4b^2x_0^2+1},\qquad F_{Ry}=\lambda=\frac{2mb\dot{x}_0^2+mg}{4b^2x_0^2+1}$$