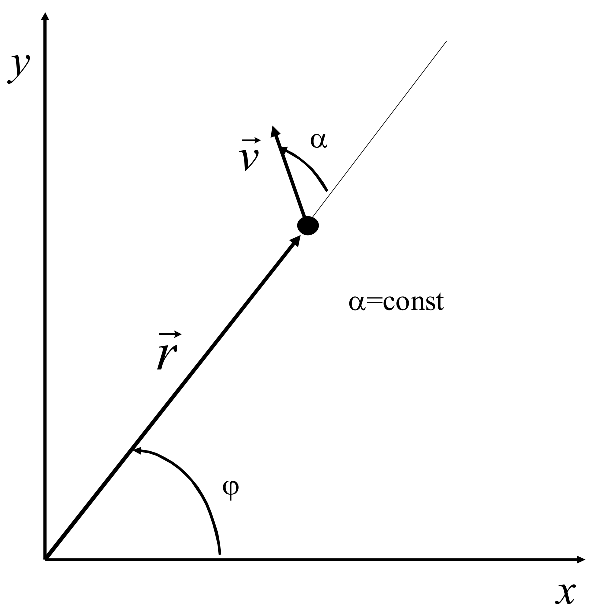
Zadanie 4 (seria I). W pewnym ruchu punktu materialnego zachodzącym na płaszczyźnie kąt pomiędzy wektorem wodzącym $\vec{r}$ i wektorem prędkości $\vec{v}$ jest stały w czasie i równy α. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych wprowadzonym w płaszczyźnie ruchu ciała równanie toru po którym porusza się ten punkt. Wiadomo iż $r(\varphi = 0) = r_0$.

Wsk. $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$



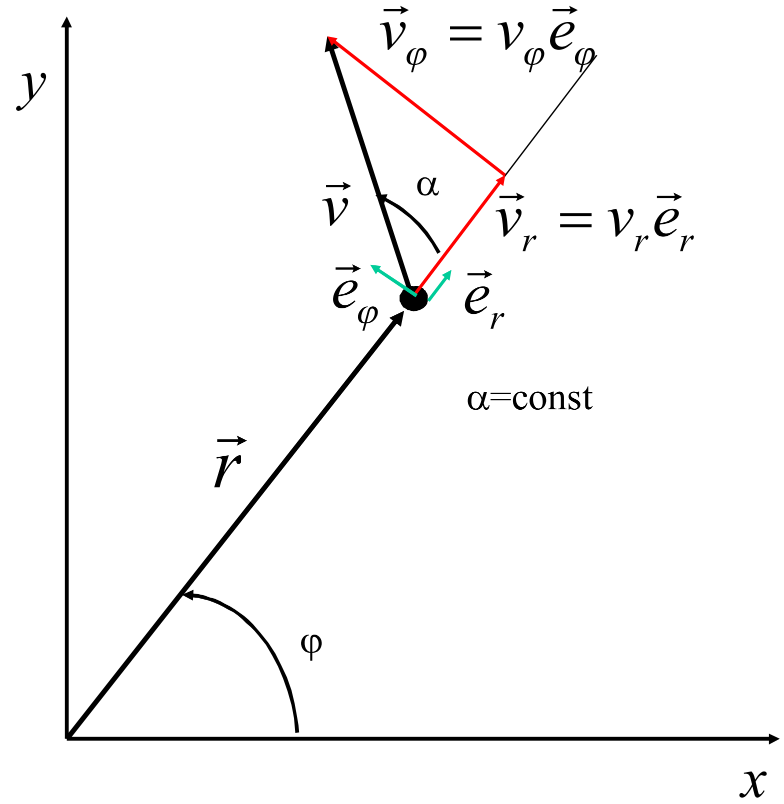
W układzie biegunowym

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

gdzie

$$v_r = \dot{r}\,,\; v_\varphi = r\dot{\varphi}\,.$$

Z faktu iż $\alpha = const$ oraz załączonego rysunku wynika iż



$$ctg(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r|}{|\vec{v}_\varphi|} = \frac{v_r}{v_\varphi} = const$$

$\alpha \neq 0$

A zatem

$$const = ctg(\alpha) = \frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} \qquad (1)$$

Ponieważ *r* traktujemy jako jawna funkcję wyłącznie kata φ (który zależy od czasu) to można wyeliminować w powyższym równaniu zależność od czasu wykorzystując relacje

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} \qquad (2)$$

Z(1) i (2) wynika iż

$$ctg(\alpha) = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}}{r\dot{\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r}$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r ctg(\alpha)$$

Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych

Mnożymy obustronnie równanie przez $\frac{d\varphi}{r}$ i otrzymujemy

$$\frac{1}{r} dr = ctg(\alpha) d\varphi$$

Całkujemy obustronnie

$$\int \frac{1}{r} dr = \int ctg(\alpha) d\varphi$$

$\ln(r) = ctg(\alpha)\varphi + C$ gdzie C-stała całkowania

Z warunku zadania $r(\varphi = 0) = r_0$ wynika równanie

$\ln(r_0) = C$ czyli

$$\ln(r) = ctg(\alpha)\varphi + \ln(r_0) \Rightarrow \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = ctg(\alpha)\varphi \Rightarrow \frac{r}{r_0} = \exp(ctg(\alpha)\varphi) \Rightarrow r = r_0 \exp(ctg(\alpha)\varphi)$$

(spirala logarytmiczna)