

Zad. 3b (seria VII). Pocisk o masie $m_1=1\text{kg}$ lecący z szybkością $V=10\text{m/s}$ w kierunku prostopadłym do osi pręta trafia w koniec pręta o długości $l=2\text{m}$ i masie $m_2=7\text{kg}$. Pręt ten może się obracać dookoła osi prostopadłej do osi pręta przechodzącej w odległości $l/6$ od końca pręta, w który trafił pocisk.

Znaleźć prędkość kątową, z jaką pręt zacznie się obracać, gdy utkwi w nim pocisk.

Dane $l=2\text{m}, V=10\text{m/s}, m_1=1\text{kg}, m_2=7\text{kg}, r_{\perp p}=l/6$

Szukane ω

Rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu Oz jest równy zeru. A zatem rzut wypadkowego momentu pędu $\vec{L}$ układu złożonego z pocisku i pręta na tą oś jest zachowany w trakcie zderzenia. Przy odpowiednim obróceniu zwrotu osi Oz prostopadłej do pręta składowa z-owa momentu pędu jest równa długości wektora momentu pędu rozważanego układu określonego względem punktu leżącego na przecie na osi obrotu (wektor momentu pędu jest równoległy do osi obrotu). Przed zderzeniem wkład do tego momentu wnoszą tylko pocisk, a zatem szukana składowa jest równa

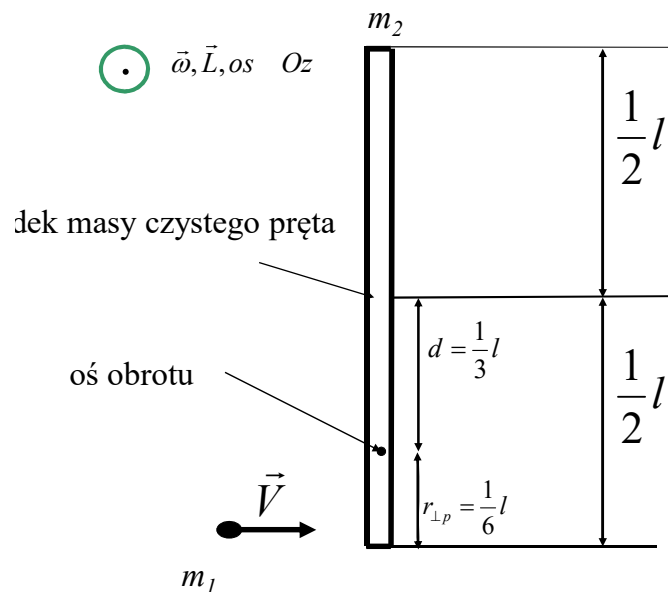
$$L_{pocz,z} = |\vec{L}_{poc}| = r_{\perp p} |\vec{p}_p| = \frac{l}{6} \cdot m_1 V = \frac{1}{6} l m_1 V$$

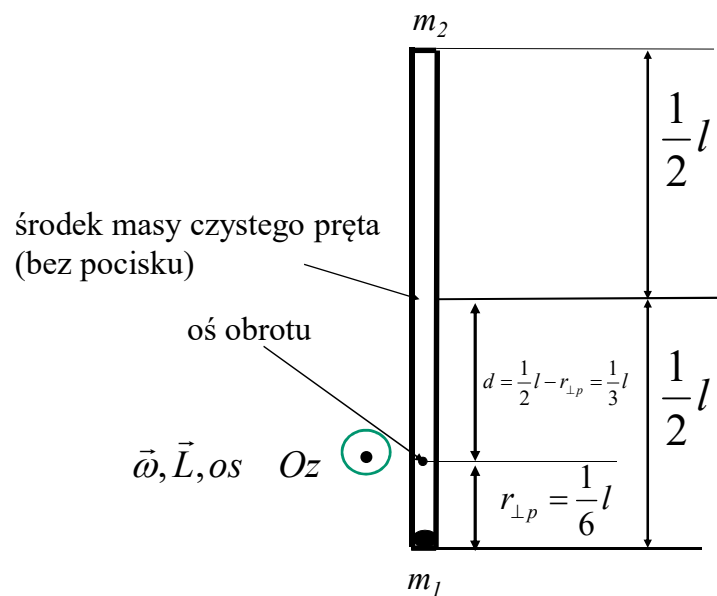
$r_{\perp p}$ - odległość prostej o kierunku wyznaczonym przez wektor pędu pocisku $\vec{p}_p$ od punktu na przecie leżącym na osi obrotu względem którego liczymy moment pędu

Po zderzeniu z-ową składową momentu pędu układu złożonego z obracającego się pręta z pociskiem można wyznaczyć ze wzoru

$$L_{konc,z} = I\omega \quad \text{gdzie}$$

ω - wartość prędkości kątowej ruchu obrotowego pręta
 I - moment bezwładności układu złożonego z pręta z pociskiem względem osi obrotu.





$$L_{pocz,z} = L_{konc,z} \Rightarrow \frac{1}{6} l m_1 V = I \omega \Rightarrow \omega = \frac{l m_1 V}{6I}$$

Określenie I -momentu bezwładności układu złożonego z pręta z pociskiem względem osi obrotu.

$$I = I_{poc} + I_{pr}$$

Moment bezwładności pocisku

$$I_{poc} = m_1 r_{\perp p}^2 = m_1 \cdot \left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} m_1 l^2$$

Moment bezwładności pręta (tw. Steinera) gdzie $I_{pr} = I_0 + m_2 d^2 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + \frac{1}{9} m_2 l^2 = \frac{7}{36} m_2 l^2$

$I_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2$ moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy prostopadłej do pręta

$d = \frac{l}{2} - r_{\perp p} = \frac{l}{3}$ Odległość między osią obrotu a środkiem masy czystego pręta (bez pocisku)

A zatem $I = I_{poc} + I_{pr} = \frac{1}{36} m_1 l^2 + \frac{7}{36} m_2 l^2 = \frac{l^2}{36} (m_1 + 7m_2)$

$$\omega = \frac{l m_1 V}{6I} = \frac{l m_1 V}{6 \cdot \frac{l^2}{36} (m_1 + 7m_2)} = \frac{6 m_1 V}{l (m_1 + 7m_2)} = \frac{6 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ m} \cdot (1 \text{ kg} + 7 \cdot 7 \text{ kg})} = \frac{60 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ m} \cdot 50 \text{ kg}} = 0,6 \frac{1}{\text{s}} = 0,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$