

Zadanie 3 (seria II). Punkt materialny o masie m zsuwa się pod wpływem siły ciężkości

$\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej spirali opisanej równaniami:

$$x = a \cos(kz) \qquad y = a \sin(kz)$$

gdzie a, k to znane stałe, $a > 0$. Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy

a) równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.

b) zasady d'Alemberta

Wiadomo, że $z(t = 0) = z_0$ oraz $\dot{z}(t = 0) = \dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Znaleźć zależność od czasu siły reakcji działającej na punkt materialny.

Równania Lagrange'a I rodzaju w trakcie ruchu pojedynczego punktu materialnego

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R = \vec{F} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{grad} f_k$$

gdzie $f_k(\vec{r}, t) = 0$ - $k=1, \dots, p$ - równania p więzów

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ siła wypadkowa bez uwzględnienia sił reakcji więzów,

$$\vec{F}_R = (F_{Rx}, F_{Ry}, F_{Rz}) = \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x}, \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}, \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) \quad \text{-siła reakcji więzów,}$$

λ_k oznaczają nieoznaczone mnożniki Lagrange'a.

W przestrzeni trójwymiarowej $p=1$ -ruch po powierzchni, $p=2$ -ruch po krzywej

Po rozpisaniu na składowe

$$m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \qquad m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}$$

Rozwiązanie zadania przy pomocy równań Lagrange'a I rodzaju

Siła wypadkowa $\vec{F} = [0, 0, -mg]$.

Równania więzów ($p=2$): (więzy skleronomiczne)

$$f_1(x, z) = x - a \cos(kz) = 0$$

$$f_2(y, z) = y - a \sin(kz) = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \quad (*)$$

$$m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = 0 + 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \quad (**)$$

$$m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg + ak \sin(kz) \lambda_1 - ak \cos(kz) \lambda_2 \quad (***)$$

Eliminacja nieoznaczonych mnożników Lagrange'a λ_1 i λ_2 w równaniu (***) przy pomocy równań (*) i (**) daje

$$m\ddot{z} = -mg + mak \sin(kz) \ddot{x} - mak \cos(kz) \ddot{y}$$

Otrzymaliśmy 1 równanie ruchu bo układ ma 1 stopień swobody (ruch jednego punktu materialnego po krzywej)

Równanie powyższe trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równań więzów

Z równania więzów

$$x = a \cos(kz) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial z} \dot{z} = -ak \sin(kz) \dot{z} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}} \ddot{z} = -ak^2 \cos(kz) \dot{z}^2 - ak \sin(kz) \ddot{z}$$

$$y = a \sin(kz) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial z} \dot{z} = ak \cos(kz) \dot{z} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}} \ddot{z} = -ak^2 \sin(kz) \dot{z}^2 + ak \cos(kz) \ddot{z}$$

$$m\ddot{x}ak \sin(kz) - m\ddot{y}ak \cos(kz) - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$-ma^2k^3 \sin(kz) \cos(kz) \dot{z}^2 - ma^2k^2 \sin^2(kz) \ddot{z} + ma^2k^3 \sin(kz) \cos(kz) \dot{z}^2 - ma^2k^2 \cos^2(kz) \ddot{z} - mg - m\ddot{z} = 0$$

$$-ma^2k^2 [\sin^2(kz) + \cos^2(kz)] \ddot{z} - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow -m(a^2k^2 + 1) \ddot{z} - mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{g}{(a^2k^2 + 1)}$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{(a^2k^2 + 1)} \Rightarrow \dot{z} = -\frac{g}{(a^2k^2 + 1)}t + A \Rightarrow z = -\frac{g}{2(a^2k^2 + 1)}t^2 + At + B$$

$$x = a \cos(kz)$$

$$z(t=0) = z_0$$

$$\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$$

$$y = a \sin(kz)$$

$$z(t=0) = B \rightarrow B = z_0$$

$$\dot{z}(t=0) = A \rightarrow A = \dot{z}_0$$

$$z = -\frac{g}{2(a^2k^2 + 1)}t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

Wyznaczenie składowych siły reakcji w układzie kartezjańskim

Pokazano iż $f_1(x, z) = x - a \cos(kz) = 0$ $f_2(y, z) = y - a \sin(kz) = 0$

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \quad (*)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \quad (**)$$

$$m\ddot{z} = ak \sin(kz)\lambda_1 - ak \cos(kz)\lambda_2 - mg \quad (***)$$

$$\ddot{x} = -ak^2 \cos(kz)\dot{z}^2 - ak \sin(kz)\ddot{z} \quad \ddot{y} = -ak^2 \sin(kz)\dot{z}^2 + ak \cos(kz)\ddot{z}$$

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \text{grad} f_k \Rightarrow$$

$$F_{Rx} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} = \lambda_1 = m\ddot{x} = -mak^2 \cos(kz)\dot{z}^2 - mak \sin(kz)\ddot{z}$$

$$F_{Ry} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} = \lambda_2 = m\ddot{y} = -mak^2 \sin(kz)\dot{z}^2 + mak \cos(kz)\ddot{z}$$

$$F_{Rz} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} = ak \sin(kz)\lambda_1 - ak \cos(kz)\lambda_2 = m\ddot{z} + mg = -\frac{mg}{a^2 k^2 + 1} + mg = mg \frac{a^2 k^2}{a^2 k^2 + 1}$$

Z (***)

$$z = -\frac{g}{2(a^2 k^2 + 1)} t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

gdzie $\dot{z} = -\frac{g}{(a^2 k^2 + 1)} t + \dot{z}_0$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{(a^2 k^2 + 1)}$$

$-F_z$

Zasada d'Alemberta w przypadku pojedynczego punktu materialnego o masie m

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

gdzie $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ siła wypadkowa bez uwzględnienia sił reakcji więzów,
 $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ dowolny wektor przesunięcia wirtualnego zgodnego z więzami
spełniający poniższe warunki

$$\text{grad} f_k \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z = 0 \quad k=1, \dots, p$$

gdzie

$$f_k(\vec{r}, t) = 0 \quad k=1, \dots, p \quad - \text{równania } p \text{ więzów}$$

W przestrzeni trójwymiarowej $p=1$ - ruch po powierzchni, $p=2$ - ruch po krzywej

Wyznaczenie ruchu ciała przy pomocy zasady d'Alemberta

Analizujemy ruch po krzywej w przestrzeni trójwymiarowej

Równania więzów ($p=2$):

$$f_1(x, z) = x - a \cos(kz) = 0 \quad f_2(y, z) = y - a \sin(kz) = 0 \quad (\text{więzy skleronomiczne})$$

Warunki na wektor przesunięcia wirtualnego $\delta \vec{r}$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow \delta x + ak \sin(kz) \delta z = 0 \Rightarrow \delta x = -ak \sin(kz) \delta z$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow \delta y - ak \cos(kz) \delta z = 0 \Rightarrow \delta y = ak \cos(kz) \delta z$$

Zapis głównego równania zasady d'Alemberta

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y + (-mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}ak \sin(kz) - m\ddot{y}ak \cos(kz) - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$

$$\delta z \text{ dowolne} \Rightarrow m\ddot{x}ak \sin(kz) - m\ddot{y}ak \cos(kz) - mg - m\ddot{z} = 0$$

Otrzymaliśmy to samo równanie co w metodzie opartej o równania Lagrange'a I rodzaju, które w celu znalezienia ruchu ciała trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równań więzów w ten sam sposób co poprzednią metodą.