



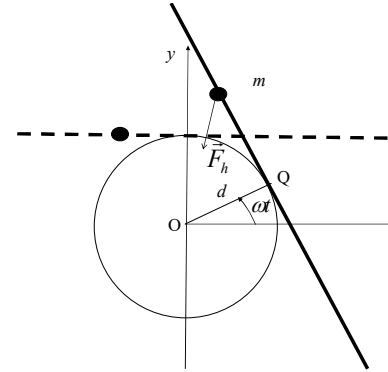
OMNIS2

Zadanie 3 (seria V). W płaszczyźnie poziomej leży gładka prosta obracająca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω dookoła początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Odległość prostej od początku układu współrzędnych wynosi d , przy czym w chwili początkowej $t=0$ prosta była położona równoległe do osi Oy. Po prostej porusza się ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła skierowana w kierunku początku układu współrzędnych o wartości proporcjonalnej do odległości ciała od początku układu współrzędnych $\vec{F}_h = -k\vec{r}$ (k - znana dodatnia stała). Nie uwzględniamy wpływu siły grawitacyjnej na ruch ciała. Znaleźć funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona dla tego ciała. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

Wybór współrzędnych uogólnionych

1 stopień swobody $\Rightarrow$ jedna współrzędna uogólniona

$q_1 = s$ określa aktualne położenie ciała względem punktu Q leżącego na przecięciu prostej, po której odbywa się ruch z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez początek układu współrzędnych O.



Kąt φ jaki tworzy prosta przechodząca przez punkty Q i O z osią Ox zmienia się w czasie w sposób wymuszony przez więz reonomiczny tak iż $\varphi = \omega t$



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika Warszawska

Związek współrzędnej uogólnionej ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$x = d \cos(\varphi) - s \sin(\varphi) = d \cos(\omega t) - s \sin(\omega t)$$

$$y = d \sin(\varphi) + s \cos(\varphi) = d \sin(\omega t) + s \cos(\omega t)$$

Energia kinetyczna $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$x = d \cos(\omega t) - s \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} \dot{s} = -d\omega \sin(\omega t) - s\omega \cos(\omega t) - \dot{s} \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -(d\omega + \dot{s})\sin(\omega t) - s\omega \cos(\omega t)$$

$$y = d \sin(\omega t) + s \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s} \dot{s} = d\omega \cos(\omega t) - s\omega \sin(\omega t) + \dot{s} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{y} = (d\omega + \dot{s})\cos(\omega t) - s\omega \sin(\omega t)$$

$$T = \frac{m}{2}[(d\omega + \dot{s})^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + s^2\omega^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) + 2(d\omega + \dot{s})\sin(\omega t)s\omega \cos(\omega t) - 2(d\omega + \dot{s})\sin(\omega t)s\omega \cos(\omega t)] =$$

$$T = \frac{m}{2}[(d\omega + \dot{s})^2 + s^2\omega^2] = \frac{m}{2}(d^2\omega^2 + \dot{s}^2 + 2d\omega\dot{s} + s^2\omega^2)$$

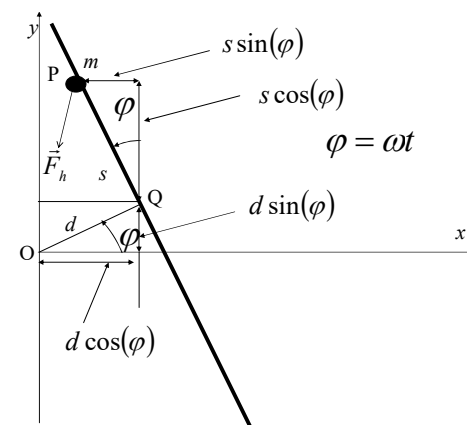
Potencjał (energia potencjalna)

$$\begin{aligned} F_x &= -kx = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -ky = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \Rightarrow V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = |OP|^2 = s^2 + d^2 \Rightarrow V = \frac{1}{2}k(s^2 + d^2)$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}(d^2\omega^2 + s^2\omega^2 + \dot{s}^2 + 2d\omega\dot{s}) - \frac{k}{2}(s^2 + d^2)$$



$$L = \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2 + \dot{s}^2 + 2d\omega\dot{s}) - \frac{k}{2} (s^2 + d^2)$$

Pęd uogólniony $\dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} + md\omega$$

Uogólniona energia $G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L \quad f=1$

$$G = p_s \dot{s} - L = m\dot{s}^2 + md\omega\dot{s} - \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2 + \dot{s}^2 + 2d\omega\dot{s}) + \frac{k}{2} (s^2 + d^2) =$$

$$= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2) + \frac{k}{2} (s^2 + d^2)$$

~~$$G \neq T + V = \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2 + \dot{s}^2 + 2d\omega\dot{s}) + \frac{1}{2} k (s^2 + d^2)$$~~

Uogólniona energia **nie jest** równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej gdyż relacje między współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi zależą jawnie od czasu .

Funkcja Hamiltona $H = G(s, \dot{s}(s, p_s))$

$$p_s = m\dot{s} + md\omega \Rightarrow \dot{s} = \frac{p_s}{m} - \omega d \Rightarrow$$

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{p_s}{m} - \omega d \right)^2 - \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2) + \frac{k}{2} (s^2 + d^2) = \frac{p_s^2}{2m} - p_s \omega d + \frac{m}{2} \omega^2 d^2 - \frac{m}{2} (d^2 \omega^2 + s^2 \omega^2) + \frac{k}{2} (s^2 + d^2) =$$

$$= \frac{p_s^2}{2m} - p_s \omega d - \frac{m}{2} \omega^2 s^2 + \frac{k}{2} (s^2 + d^2)$$

$$H = \frac{p_s^2}{2m} - p_s \omega d - \frac{m}{2} \omega^2 s^2 + \frac{k}{2} (s^2 + d^2)$$

Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

Równania Hamiltona $\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad (l=1, \dots, f) \quad f=1$

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p_s} = \frac{p_s}{m} - \omega d \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial s} = m\omega^2 s - ks$$