

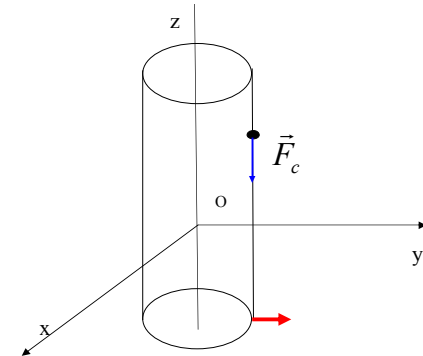
Zadanie 3 (seria III)

Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ po gładkiej, rozszerzającej się powierzchni walca. Oś walca jest skierowana pionowo w górę, zaś promień podstawy walca ρ równy w chwili początkowej R_0 rozszerza się tak, iż $\rho(t) = R_0 + At$, gdzie R_0 i A to dodatnie stałe. Wiadomo ponadto, że w chwili początkowej $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = 0$, $x(t=0) = R_0$, $\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$. Napisać równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch punktu materialnego. W oparciu o te równania znaleźć całkę ruchu i wyznaczyć ruch punktu materialnego. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Równanie więzów

a) w układzie cylindrycznym $f(\rho, t) = \rho - R_0 - At = 0$

b) w układzie kartezjańskim $f(x, y, t) = \sqrt{x^2 + y^2} - (R_0 + At) = 0$



Wybór współrzędnych uogólnionych

2 stopnie swobody $f=2 \rightarrow$ dwie współrzędne uogólnione $q_1 = \varphi, q_2 = z$

Mogą być nimi dwie z 3 współrzędnych służących do określenia położenia ciała w cylindrycznym układzie współrzędnych: z oraz φ (współrzędna ρ nie jest współrzędną uogólnioną).

Związek współrzędnych kartezjańskich z uogólnionymi

$$x = \rho \cos(\varphi) = (R_0 + At)\cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) = (R_0 + At)\sin(\varphi)$$

Widać iż równanie więzów nie narzuca żadnych ograniczeń na wartości przyjmowane przez współrzędną φ jak i z .

$$f(x, y, t) = \sqrt{x^2 + y^2} - (R_0 + At) = 0 \Rightarrow R_0 + At - R_0 - At \equiv 0$$

Wyznaczenie energii kinetycznej T

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$x = \rho \cos(\varphi) = (R_0 + At)\cos(\varphi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = A \cos(\varphi) - (R_0 + At)\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = \rho \sin(\varphi) = (R_0 + At)\sin(\varphi) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = A \sin(\varphi) + (R_0 + At)\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}(A^2 \cos^2(\varphi) - 2A(R_0 + At)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\dot{\varphi} + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + A^2 \sin^2(\varphi) + 2A(R_0 + At)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi} + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi) + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{m}{2}(A^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + \dot{z}^2)$$

$$T(\dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Inna metoda wyznaczenia energii kinetycznej $T = \frac{m}{2}(v_\rho^2 + v_\phi^2 + v_z^2)$

gdzie składowe prędkości w ortogonalnym układzie cylindrycznym $v_\rho = \dot{\rho}$, $v_\phi = \rho\dot{\phi}$, $v_z = \dot{z}$

$$\rho = R_0 + At \Rightarrow \dot{\rho} = A \Rightarrow v_\rho = A \quad v_\phi = (R_0 + At)\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}(A^2 + (R_0 + At)^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

Wyznaczenie potencjału $\vec{F} = -gradV$

$$F_x = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow V = V(z) = mgz$$

Ponieważ z jest współrzędną uogólnioną to wzoru na V nie trzeba dalej przekształcać

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}(A^2 + (R_0 + At)^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{\phi}, \dot{z}, t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju:
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad l=1, \dots, f$$

$$L(z, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2} \left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz$$

$$1) \quad l=1, \quad q_1 = \varphi \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} \right) = 0 \Rightarrow m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (1)$$

Z równania (1) wynika iż wielkość $m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}$ nie zależy od czasu i jest całką (stałą) ruchu.

Jest ona równa pędowi uogólnionemu $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ związanemu ze współrzędną uogólnioną φ .

Jest ona całką ruchu bo współrzędna φ jest współrzędną cykliczną (nie występuje w funkcji Lagrange'a).

$$2) \quad l=2, \quad q_2 = z \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m\dot{z}) + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{z} + mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -g \quad (2)$$

Wyznaczenie ruchu ciała

Rozwiązanie równania (2)

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + B \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + Bt + C$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z(t=0) = z_0 \Rightarrow C = z_0 \quad \dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Analiza równania (1)

$$m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

Oznaczenie $p_\varphi(t) = m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}$ - pęd uogólniony związany ze współrzędną φ

$$m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = \text{const} \Leftrightarrow p_\varphi = \text{const} \Rightarrow p_\varphi(t) = p_\varphi(t=0) \Rightarrow m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = mR_0^2 \dot{\varphi}(t=0)$$

Wyznaczenie z warunków początkowych ruchu $\dot{\varphi}(t=0)$

$$x(t=0) = R_0 \Rightarrow \cos(\varphi(t=0)) = 1 \Rightarrow \varphi(t=0) = 0 + 2n\pi = 0$$
$$x(t) = (R_0 + At)\cos(\varphi) \Rightarrow x(t=0) = R_0 \cos(\varphi(t=0))$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0, \varphi(t=0) = 0$$
$$\dot{y}(t) = A\sin(\varphi) + (R_0 + At) \cdot \cos(\varphi) \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{y}(t=0) = A\sin(\varphi(t=0)) + R_0 \cos(\varphi(t=0)) \dot{\varphi}(t=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_0 \dot{\varphi}(t=0) = \dot{y}_0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t=0) = \frac{\dot{y}_0}{R_0} \quad \text{Przy okazji pokazano iż} \quad \varphi(t=0) = 0$$

$$\text{A zatem} \quad m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = mR_0^2 \dot{\varphi}(t=0) \Rightarrow (R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = R_0 \dot{y}_0$$

Otrzymane równanie różniczkowe jest rzędu pierwszego podczas gdy równanie otrzymane

na drodze policzenia pochodnej po czasie w relacji otrzymanej wcześniej $\frac{d}{dt}(m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}) = 0$

byłoby równaniem różniczkowym rzędu drugiego

Rozwiązanie równania $(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = R_0 \dot{y}_0$

$$(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} = R_0 \dot{y}_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R_0 \dot{y}_0}{(R_0 + At)^2} \Rightarrow \varphi(t) = R_0 \dot{y}_0 \int \frac{1}{(R_0 + At)^2} dt = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + C$$

Wyznaczenie stałej całkowania C

$$\varphi(t=0) = 0$$

$$\varphi(t=0) = -\frac{\dot{y}_0}{A} + C \Rightarrow C = \frac{\dot{y}_0}{A}$$

A zatem

$$\varphi(t) = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + C = -\frac{R_0 \dot{y}_0}{A} \cdot \frac{1}{R_0 + At} + \frac{\dot{y}_0}{A} = \frac{\dot{y}_0}{A} \left[1 - \frac{R_0}{R_0 + At} \right] = \frac{\dot{y}_0 t}{R_0 + At}$$

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Dodatek: policzenie funkcji G (uogólnionej energii) i sprawdzenie czy jest całką ruchu

$$G = \sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l) - L = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L$$

$$L(z, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = T - V = \frac{m}{2} \left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$G = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L = m(R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2} \left(A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$$

$$G = \frac{m}{2} \left(-A^2 + (R_0 + At)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz = T + V - mA^2 \neq T + V$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -mA(R_0 + At)\dot{\varphi}^2 = -mA(R_0 + At) \frac{R_0^2 \dot{\varphi}_0^2}{(R_0 + At)^4} = -mA \frac{R_0^2 \dot{\varphi}_0^2}{(R_0 + At)^3}$$

$$\frac{dG}{dt} \neq 0 \Rightarrow G \neq const \Rightarrow T + V = G + mA^2 \neq const$$

Uogólniona energia nie jest równa energii całkowitej (choć różni się od niej o stałą wielkość)

Jest tak bo w relacjach $x = (R_0 + At)\cos(\varphi)$ $y = (R_0 + At)\sin(\varphi)$ występuje jawnie czas

Uogólniona energia jak i energia nie są całkami ruchu.

Energia nie jest całką ruchu bo siła reakcji więzów reonomicznych wykonuje (ujemną) pracę

Gdyby $A=0$ to wiąz skleronomiczny (walec o stałym promieniu) i brak czasu w relacjach

$x = R_0 \cos(\varphi)$ $y = R_0 \sin(\varphi)$.A zatem uogólniona energia $G=T+V$

Dodatkowo $G=T+V$ byłaby całką ruchu bo siła reakcji nie wykonywałaby pracy.