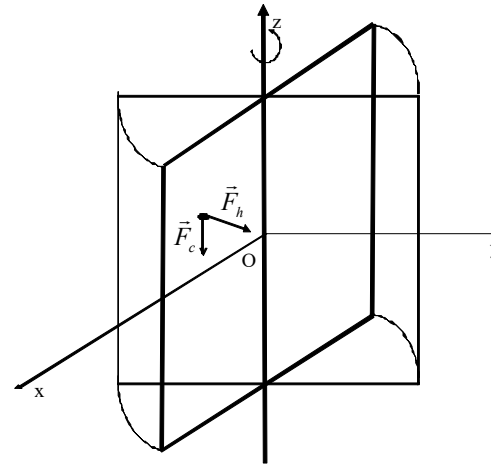




Zadanie 3 (seria II).

Pionowo ustawiona płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz, która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m , na który w układzie inercyjnym działa siła ciężkości $\vec{F}_c = (0, 0, -mg)$ oraz siła harmoniczna $\vec{F}_h = (-kx, -ky, -kz)$ (g-znana wartość przyspieszenia ziemskiego, k -znana dodatnia stała). Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t=0) = x_0 > 0$, $y(t=0) = 0$, $z(t=0) = 0$ oraz $\dot{x}(t=0) = 0$, $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$.



- Wyznaczyć ruch tego punktu korzystając z zasady d'Alemberta gdy $\frac{k}{m} < \omega^2$.
- Wykorzystując formalizm prowadzący do równań Lagrange'a I rodzaju pokazać iż składowa z-owa siły reakcji jest równa zero $F_{Rz}=0$, oraz zachodzi poniższa relacja wiążąca ze sobą składowe x-ową F_{Rx} i y-ową F_{Ry} siły reakcji $F_{Ry} \sin(\omega t) = -F_{Rx} \cos(\omega t)$.
- Określić siłę reakcji więzów działającą na ten punkt gdy $\frac{k}{m} < \omega^2$.



Zasada d'Alemberta w przypadku pojedynczego punktu materialnego o masie m

$$(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow (F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

gdzie $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ siła wypadkowa bez uwzględnienia sił reakcji więzów,
 $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ dowolny wektor przesunięcia wirtualnego spełniający poniższe warunki

$$\text{grad} f_k \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z = 0 \quad k=1, \dots, p$$

gdzie

$$f_k(\vec{r}, t) = 0 \quad k=1, \dots, p \quad - \text{równania } p \text{ więzów}$$

a) Wyznaczenie ruchu ciała przy pomocy zasady d'Alemberta

Analizujemy ruch pojedynczego punktu materialnego po powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej

Równania więzów ($p=1$):

$$f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0 \quad \text{wiąz reonomiczny}$$

Warunek na wektor przesunięcia wirtualnego $\delta \vec{r}$

$$k=1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0 \Rightarrow -\sin(\omega t) \delta x + \cos(\omega t) \delta y = 0 \Rightarrow \cos(\omega t) \delta y = \sin(\omega t) \delta x$$

Siła wypadkowa $\vec{F} = (-kx, -ky, -kz - mg)$

Zapis głównego równania zasady d'Alemberta $(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$

$$-(kx + m\ddot{x})\delta x - (ky + m\ddot{y})\delta y - (kz + mg + m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$-(kx + m\ddot{x})\cos(\omega t)\delta x - (ky + m\ddot{y})\cos(\omega t)\delta y - (kz + mg + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(kx + m\ddot{x})\cos(\omega t) - (ky + m\ddot{y})\sin(\omega t))\delta x - (kz + mg + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0$$

Równanie powyższe musi być spełnione dla dowolnych δx i δz (także równych zero) gdyż warunek (*) wprowadzający ograniczenia na wektor $\delta \vec{r}$ już wykorzystano eliminując δy

$$1) \quad \delta_x = 0 \Rightarrow -(mg + kz + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0$$

$$\delta_z \text{ dowolne} \Rightarrow -(mg + kz + m\ddot{z})\cos(\omega t) = 0 \Rightarrow mg + kz + m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

$$2) \quad \delta_z = 0 \Rightarrow -(kx + m\ddot{x})\cos(\omega t) - (ky + m\ddot{y})\sin(\omega t))\delta x = 0$$

$$\delta_x \text{ dowolne} \Rightarrow (kx + m\ddot{x})\cos(\omega t) + (ky + m\ddot{y})\sin(\omega t) = 0$$

Dwa równania ruchu bo układ ma 2 stopnie swobody (ruch 1 punktu materialnego po powierzchni)

Równania te trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równania więzów

$$f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0$$

Rozwiązanie równania $-kz - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$

Jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach niejednorodne. Równanie więzów nie wprowadza ograniczenia na zmienną z występującą w analizowanym równaniu dlatego można go rozwiązać niezależnie od innych równań

Pełne rozwiązanie tego równania jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

oraz rozwiązania szczególnego równania pełnego

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

Równanie jednorodne można zapisać w postaci

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{gdzie} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Równanie to ma taką postać jak równanie opisujące jednowymiarowy oscylator harmoniczny nietłumiony i jego ogólne rozwiązanie ma postać

$$z_{og} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{co można łatwo pokazać}$$

Rozwiązanie równania

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

Rozwiązań powyższego równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach jednorodnego poszukujemy w postaci $z(t) = C \exp(\lambda t)$

Po wstawieniu tej postaci do równania różniczkowego otrzymujemy równanie charakterystyczne : $C\lambda^2 \exp(\lambda t) + \omega^2 C \exp(\lambda t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$

Jego pierwiastki są równe $\lambda_1 = i\omega$ oraz $\lambda_2 = -i\omega$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ to ogólne rozwiązanie można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} z(t) &= C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wykorzystano relacje (α -liczba rzeczywista)

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad \exp(-i\alpha) = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

Ostatecznie

$$z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

gdzie $A = C_1 + C_2$ $B = i(C_1 - C_2)$ stałe rzeczywiste

Rozwiązania szczególnego równania pełnego $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$

poszukujemy w rozważanym przypadku w postaci stałej $z_{szcz} = C$.

Po wstawieniu zapostulowanej postaci rozwiązania do pełnego równania

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g$$

otrzymujemy warunek

$$0 + \frac{k}{m}C = -g \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

A zatem rozwiązanie ogólne równania pełnego ma postać

$$z(t) = z_{og} + z_{szcz} = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k}$$

Stałe A i B możemy określić z warunków początkowych ruchu

Ponieważ $z(t=0) = z_0$, $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$ i uwzględniając to iż

$$\dot{z}(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{mamy } A = \frac{mg}{k}, \quad B = \dot{z}_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ruch ciała w kierunku pionowym ma charakter drgań harmoniczných

wokół punktu $z = -\frac{mg}{k}$ z częstością kołową $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Rozwiązanie równania $(kx + m\ddot{x})\cos(\omega t) + (ky + m\ddot{y})\sin(\omega t) = 0$

Równanie więzów $f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0$ wprowadza związek między zmiennymi x i y , które trzeba uwzględnić rozwiązując równanie ruchu. Można uzależnić np. w oparciu o równanie więzów y od x i t i w oparciu o tę relację uzależnić $\dot{y}$ od $x, \dot{x}, \ddot{x}, t$ otrzymując równanie zależne tylko od $x, \dot{x}, \ddot{x}, t$.
Otrzymane równanie bardzo skomplikowane, problemy dla chwil czasu gdy $\cos(\omega t) = 0$

Problem można uprościć wprowadzając nową zmienną ρ , na wielkość której nie wprowadza równanie więzów ograniczeń, a która to zmienna wraz ze zmienną z w pełni opisuje położenie ciała na płaszczyźnie. Wielkością tą może być x' -owa składowa wektora wodzącego ciała w układzie obracającym się wokół osi Oz z prędkością kątową $\vec{\omega} = [0, 0, \omega]$ o osi Oz' pokrywającej się z osią Oz i osi Ox' stale leżącej w płaszczyźnie ruchu. W przypadku gdy $x' = \rho > 0$ współrzędna ta jest jedną ze współrzędnych w nieruchomym cylindrycznym układzie współrzędnych, ale w zadaniu dopuszczamy iż może ona także przyjmować wartości ujemne.

Związek wielkości x i y ze zmienną ρ

$$x = \rho \cos(\omega t) \quad y = \rho \sin(\omega t)$$

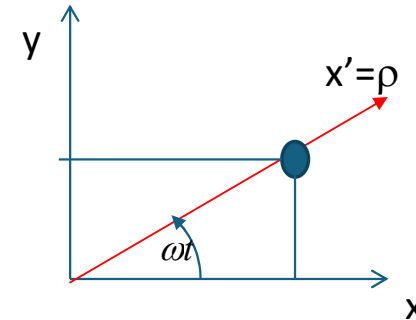
Równanie więzów nie wprowadza ograniczenia na zmienną ρ

$$f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = \rho \sin(\omega t) \cos(\omega t) - \rho \cos(\omega t) \sin(\omega t) \equiv 0$$

Z relacji wiążących x oraz y z ρ i t wynika iż

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial x}{\partial t} = \cos(\omega t) \dot{\rho} - \rho \omega \sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial y}{\partial t} = \sin(\omega t) \dot{\rho} + \rho \omega \cos(\omega t)$$



$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\rho}} \ddot{\rho} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = -\omega \sin(\omega t) \dot{\rho} + \cos(\omega t) \ddot{\rho} - \omega \sin(\omega t) \dot{\rho} - \rho \omega^2 \cos(\omega t) = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \omega^2) \cos(\omega t) - 2 \dot{\rho} \omega \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial \dot{y}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\rho}} \ddot{\rho} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = \omega \cos(\omega t) \dot{\rho} + \sin(\omega t) \ddot{\rho} + \omega \cos(\omega t) \dot{\rho} - \rho \omega^2 \sin(\omega t) = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \omega^2) \sin(\omega t) + 2 \dot{\rho} \omega \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\cos(\omega t) - 2\dot{\rho}\omega\sin(\omega t) \quad \ddot{y} = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\sin(\omega t) + 2\dot{\rho}\omega\cos(\omega t)$$

Po wstawieniu otrzymanych powyższych relacji do równania ruchu $(kx + m\ddot{x})\cos(\omega t) + (ky + m\ddot{y})\sin(\omega t) = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & [k\rho + m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)]\cos^2(\omega t) - 2m\dot{\rho}\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \\ & [k\rho + m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)]\sin^2(\omega t) + 2m\dot{\rho}\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[k\rho + m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)][\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)\rho = 0$$

Wprowadzamy oznaczenie $\gamma^2 = \omega^2 - \frac{k}{m} > 0$ i równanie przyjmuje postać $\ddot{\rho} - \gamma^2\rho = 0$

Rozwiązania ogólnego równania różniczkowego poszukujemy w postaci

$$\rho = C \exp(\lambda t) \quad \Rightarrow C \exp(\lambda t) [\lambda^2 - \gamma^2] = 0$$

Równanie charakterystyczne i jego pierwiastki

$$\lambda^2 - \gamma^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \gamma, \lambda = \lambda_2 = -\gamma$$

Ogólne rozwiązanie

$$\rho = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 \exp(\gamma t) + C_2 \exp(-\gamma t)$$

$$\dot{\rho} = \gamma [C_1 \exp(\gamma t) - C_2 \exp(-\gamma t)]$$

Wyznaczenie stałych dowolnych z warunków początkowych ruchu

$$x(t=0) = x_0$$

$$x(t) = \rho \cos(\omega t) \Rightarrow x(t=0) = \rho(t=0) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho} \cos(\omega t) - \rho \omega \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = \dot{\rho}(t=0) = \gamma (C_1 - C_2) \Rightarrow C_1 - C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 = x_0$$

$$C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2} x_0$$

A zatem

$$\rho = \frac{1}{2} x_0 [\exp(\gamma t) + \exp(-\gamma t)] = x_0 \cosh(\gamma t)$$

$$x = \rho \cos(\omega t) = x_0 \cosh(\gamma t) \cos(\omega t)$$

$$y = \rho \sin(\omega t) = x_0 \cosh(\gamma t) \sin(\omega t)$$

Określenie związków między składowymi siły reakcji

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{grad} f_k$$
$$F_{Rx} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \quad F_{Ry} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \quad F_{Rz} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}$$

gdzie λ_k oznaczają nieoznaczone mnożniki Lagrange'a.

$$p = 1, f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{Rx} = -\sin(\omega t) \lambda_1, F_{Ry} = \cos(\omega t) \lambda_1, F_{Rz} = 0$$


$$F_{Ry} \sin(\omega t) = -F_{Rx} \cos(\omega t)$$

Składowa z-owa siły reakcji jest równa zero, gdyż oś Oz jest styczna do płaszczyzny po której porusza się ciało

Znajomość składowej x-owej pozwala na proste określenie składowej y-owej siły reakcji

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R = \vec{F} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \text{grad} f_k \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \quad m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \quad m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}$$

$$p = 1, f_1(x, y, t) = y \cos(\omega t) - x \sin(\omega t) = 0 \quad \text{Siła wypadkowa} \quad \vec{F} = (-kx, -ky, -kz - mg)$$

$$m\ddot{x} = -kx - \sin(\omega t) \lambda_1 \quad (*)$$

Czyli otrzymujemy 3 równania

$$m\ddot{y} = -ky + \cos(\omega t) \lambda_1 \quad (**)$$

$$m\ddot{z} = -kz - mg$$

Dygresja: Po wyznaczeniu mnożnika λ_1 z równania (*) $\lambda_1 = -\frac{m\ddot{x} + kx}{\sin(\omega t)}$ i wstawieniu wyniku do (**)

otrzymujemy poniższe równanie identyczne z tym otrzymanym przy metody zasady d'Alemberta

$$(m\ddot{x} + kx) \cos(\omega t) + (m\ddot{y} + ky) \sin(\omega t) = 0$$

Wyznaczenie siły reakcji

$$\rho = x_0 \cosh(\gamma t) \Rightarrow \dot{\rho} = x_0 \gamma \sinh(\gamma t) \Rightarrow \ddot{\rho} = x_0 \gamma^2 \cosh(\gamma t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{\rho} - \rho \omega^2) \cos(\omega t) - 2 \dot{\rho} \omega \sin(\omega t) = \\ &= (\gamma^2 - \omega^2) x_0 \cosh(\gamma t) \cos(\omega t) - 2 x_0 \omega \gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t) = \\ &= \left(\omega^2 - \frac{k}{m} - \omega^2 \right) x_0 \cosh(\gamma t) \cos(\omega t) - 2 x_0 \omega \gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t) = \\ &= -\frac{k}{m} x_0 \cosh(\gamma t) \cos(\omega t) - 2 x_0 \omega \gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Z równania (*) $m\ddot{x} = -kx - \sin(\omega t)\lambda_1$

$$\lambda_1 \leftarrow -\frac{m\ddot{x} + kx}{\sin(\omega t)} = [kx_0 - kx_0] \cosh(\gamma t) \cos(\omega t) + 2mx_0\omega\gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t) = 2mx_0\omega\gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t)$$

Siła reakcji:

$$F_{Rx} = -\sin(\omega t)\lambda_1 = -2mx_0\omega\gamma \sinh(\gamma t) \sin(\omega t)$$

$$F_{Ry} = \cos(\omega t)\lambda_1 = 2mx_0\omega\gamma \sinh(\gamma t) \cos(\omega t)$$

$$F_{Rz} = 0$$