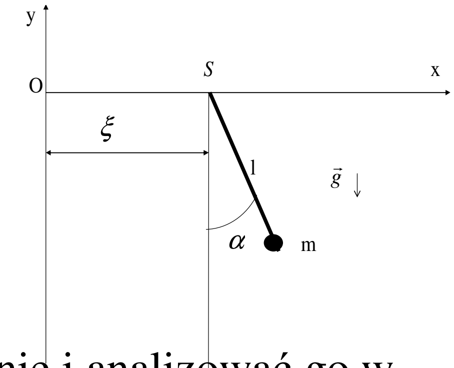
Zadanie 3 (seria II)

Rozważyć ruch wahadła matematycznego pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół, jeśli punkt zawieszenia wahadła S porusza się po prostej poziomej w taki sposób, iż jego położenie na osi poziomej zmienia się z czasem zgodnie ze wzorem:

$\xi = A\sin(\Omega t)$ $\quad$ (A, Ω-znane stałe, $\Omega \neq \sqrt{\frac{g}{l}}$).



Założyć iż ruch ciała odbywa się w stałej w czasie pionowej płaszczyźnie i analizować go w dwuwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych pokazanym na rysunku. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

1) Znaleźć przy pomocy formalizmu opartego na równaniach Lagrange'a pierwszego rodzaju równanie opisujące ruch ciała (punktu materialnego) o masie m umieszczonego na końcu nici wahadła o długości l.

2) Wiadomo, że w chwili $t=0$ ciało o masie m spoczywało w punkcie o współrzędnych $x(t=0)=0$, $y(t=0)=-l$ (l-długość nici wahadła). Określić ruch ciała zakładając, iż w jego trakcie kąt wychylenia nici wahadła od pionu jest na tyle mały, że można założyć, że $y \approx -l$, $\ddot{y} \approx 0$.

Równanie więzów:

Ze stałości długości nici wahadła $\quad [x-\xi]^2 + y^2 = l^2$

$$\xi = A\sin(\Omega t) \Rightarrow \quad f_1(x, y, t) = [x - A\sin(\Omega t)]^2 + y^2 - l^2 = 0$$

(wiąz reonomiczny)

Zapis równań Lagrange'a I rodzaju w przestrzeni dwuwymiarowej i i sformułowanie równania ruchu

;

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, grad f_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}$$

jedno równanie więzów; p=1 , $f_1 = f$, $\lambda_1 = \lambda$ $\qquad F_x = 0, F_y = -mg$

$$f(x, y, t) = [x - A\sin(\Omega t)]^2 + y^2 - l^2 = 0 \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda[x - A\sin(\Omega t)] \\ m\ddot{y} &= -mg + 2\lambda y \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m\ddot{x}}{2[x - A\sin(\Omega t)]}$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + mg = \frac{2m\ddot{x}y}{2[x - A\sin(\Omega t)]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-m\ddot{x}y + (mg + m\ddot{y})[x - A\sin(\Omega t)] = 0}$$

jedno równanie ruchu bo układ ma 1 stopień swobody (ruch 1 punktu materialnego po krzywej)

Równanie to trzeba w ogólności rozwiązać przy warunku więzów(1)

Rozwiązanie równania ruchu

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{m\ddot{x}y}{[x - A\sin(\Omega t)]} \qquad (*)$$

W celu podjęcia próby rozwiązania równania (*) należałoby wyznaczyć zależność $y = y(x,t)$ z równania więzów $f(x,y,t) = [x - A\sin(\Omega t)]^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Przy założeniu, iż w trakcie ruchu wahadła $y < 0$ otrzymalibyśmy zależność tą w postaci:

$$y = -\sqrt{l^2 - [x - A\sin(\Omega t)]^2}$$

W przypadku zaś gdy $y > 0$ miałaby ona postać:

$$y = \sqrt{l^2 - [x - A\sin(\Omega t)]^2}$$

Wykorzystując tą zależność można by określić $\ddot{y} = g(x,\dot{x},\ddot{x},t)$. Wstawiając otrzymane zależności do równania $m\ddot{y} = -mg + \frac{m\ddot{x}y}{[x - A\sin(\Omega t)]}$ otrzymalibyśmy równanie różniczkowe zależne od zmiennej x i jej pierwszej i drugiej pochodnej po czasie oraz czasu o skomplikowanej postaci. Jego rozwiązanie byłoby w ogólnym przypadku niemożliwe do wyznaczenia metodami analitycznymi.

Nieco mniej złożone równanie można by otrzymać z równania (*) wprowadzając nową zmienną w postaci kąta α określającego odchylenie nici wahadła od pionu. Związek tej zmiennej ze współrzędnymi kartezjańskimi można by przyjąć w postaci:

$$x = l\sin(\alpha) + A\sin(\Omega t), \quad y = -l\cos(\alpha)$$

Warunek więzów nie wprowadza ograniczenia na zmienną α w trakcie ruchu. Otrzymane równanie miałoby postać: $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = \frac{A\Omega^2}{l}\sin(\Omega t)\cos(\alpha)$

Także rozwiązanie tego równania przy pomocy metod analitycznych byłoby niemożliwe

W przypadku jednakże, gdy kąt wychylenia wahadła od pionu jest mały, to w pierwszym przybliżeniu można założyć, iż:

$$y = -\sqrt{l^2 - [x - A\sin(\Omega t)]^2} \approx -l$$

z czego wynika iż w trakcie ruchu także $\ddot{y} \approx 0$.

Przybliżenie to jest równoważne przybliżeniu $\sin(\alpha) \approx \alpha$ oraz $\cos(\alpha) \approx 1$ poczynionemu w równaniu: $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin(\alpha) = \frac{A\Omega^2}{l}\sin(\Omega t)\cos(\alpha)$

Po przybliżeniu równanie (*) $m\ddot{y} = -mg + \frac{m\ddot{x}y}{[x - A\sin(\Omega t)]}$

przyjmuje postać:

$$m\ddot{x}l + mg[x - A\sin(\Omega t)] = 0$$

Rozwiązanie przybliżonego równania ruchu

$$m\ddot{x}l + mg[x - A\sin(\Omega t)] = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}(x - A\sin(\Omega t)) = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2(x - A\sin(\Omega t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 A\sin(\Omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Równanie liniowe o stałych współczynnikach niejednorodne

Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

$$x_{og}=C\exp(\lambda t)\Rightarrow \ddot{x}_{og}+\omega^2 x_{og}=0\Rightarrow \lambda^2 C\exp(\lambda t)+\omega^2 C\exp(\lambda t)=0\Rightarrow \lambda^2+\omega^2=0$$

równanie charakterystyczne i jego pierwiastki

$$\lambda^2+\omega^2=0\Rightarrow \qquad \lambda=\lambda_1=i\omega$$ oraz $$\lambda=\lambda_2=-i\omega$$

Ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$x_{og}=A_1\exp(i\omega t)+A_2\exp(-i\omega t)$$

A_1,A_2 stałe dowolne zespolone

$$\exp(i\varphi)=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$$

Inny zapis rozwiązania $x_{og}=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$

gdzie $C_1=A_1+A_2$, $C_2=i(A_1-A_2)$ –stałe dowolne będące liczbami rzeczywistymi gdyż x rzeczywiste

Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\omega^2 A\sin(\Omega t)$$

Gdy $\omega^2 \neq \Omega^2$ rozwiązanie szczególne równania pełnego poszukujemy w postaci:

$$x_{sz}=D_1\cos(\Omega t)+D_2\sin(\Omega t)\Rightarrow \qquad \ddot{x}_{sz}=-\Omega^2\left[D_1\cos(\Omega t)+D_2\sin(\Omega t)\right]$$

$$\ddot{x}_{sz}+\omega^2 x_{sz}=\omega^2 A\sin(\Omega t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D_1\Omega^2\cos(\Omega t)-D_2\Omega^2\sin(\Omega t)+D_1\omega^2\cos(\Omega t)+D_2\omega^2\sin(\Omega t)=\omega^2 A\sin(\Omega t)\Rightarrow$$

Spełnienie powyższego równania dla dowolnego czasu t wymaga by

$$D_1=0 \qquad D_2=\frac{\omega^2 A}{\omega^2-\Omega^2}$$

Rozwiązanie ogólne równania pełnego w postaci:

$$x=x_{og}+x_{sz}=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\frac{\omega^2}{\omega^2-\Omega^2}A\sin(\Omega t)$$

Wyznaczenie stałych C_1 i C_2 z warunków początkowych ruchu

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} A \sin(\Omega t)$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) + \frac{\omega^2 \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} A \cos(\Omega t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t=0) = 0 \\ x(t=0) = C_1 \end{array}\right. \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = C_2 \omega + \dfrac{\omega^2 A \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \end{array}\right. \Rightarrow C_2 = -\frac{\omega A \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Zależność x (t) w trakcie ruchu:

$$x(t) = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}\left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega t)\right]$$