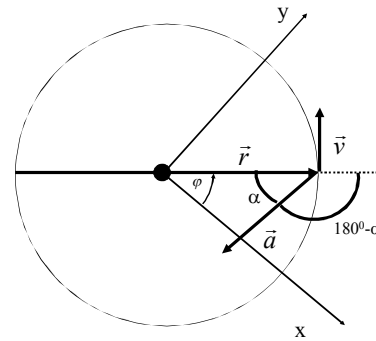
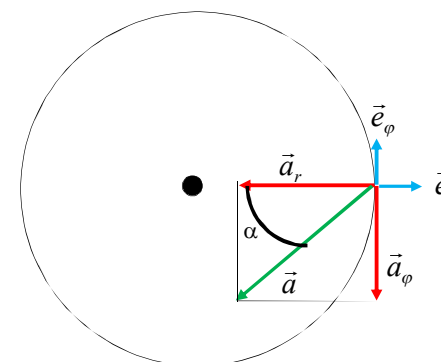
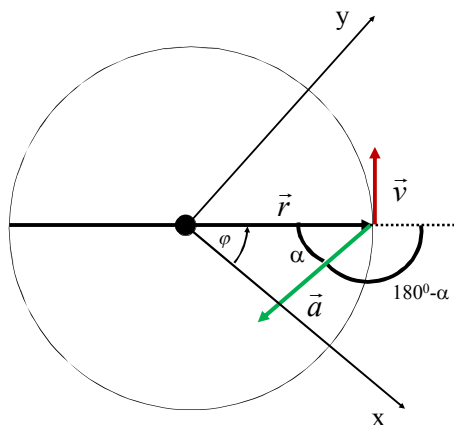


Zadanie 3 (seria I). Znaleźć zależność od czasu $\varphi(t)$ kąta jaki tworzy z osią Ox wektor wodzący punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r_0 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jeżeli kąt między promieniem wodzącym a wektorem przyspieszenia ma stałą wartość $\pi - \alpha$ przy czym $\alpha \in (0, \pi/2)$. Przyjąć, że $\varphi(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$.

Wsk. Przy rozwiązywaniu równania różniczkowego wprowadzić podstawienie $\dot{\varphi} = u$.





Do rozwiązania zadania stosujemy układ biegunowy.

Wektor wodzący $\vec{r} = r\vec{e}_r$ przy czym $r = |\vec{r}|$.

Przyspieszenie $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

gdzie $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2$, $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$.

$$r = r_0 = \text{const} \Rightarrow a_r = \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 = -r_0(\dot{\varphi})^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = r_0\ddot{\varphi}$$

Z treści zadania i załączonego rysunku

$$\text{const} = \text{tg}(\alpha) = \frac{|\vec{a}_\varphi|}{|\vec{a}_r|} = \frac{|a_\varphi|}{|a_r|} = \frac{-a_\varphi}{-a_r} = \frac{a_\varphi}{a_r}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{r_0\ddot{\varphi}}{-r_0(\dot{\varphi})^2} = -\frac{\ddot{\varphi}}{(\dot{\varphi})^2}$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej $u = \dot{\varphi}$

$$\text{tg}(\alpha) = -\frac{\dot{u}}{u^2} \Rightarrow \dot{u} = -u^2 \text{tg}(\alpha)$$

Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\frac{du}{u^2} = -\operatorname{tg}(\alpha) dt$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\operatorname{tg}(\alpha) \int dt$$

$$-\frac{1}{u} = -\operatorname{tg}(\alpha)t + C .$$

Stałą całkowania C wyznaczamy z warunku początkowego $\dot{\varphi}(t=0) = u(t=0) = \omega_0$

z którego wynika iż $C = -\frac{1}{\omega_0}$.

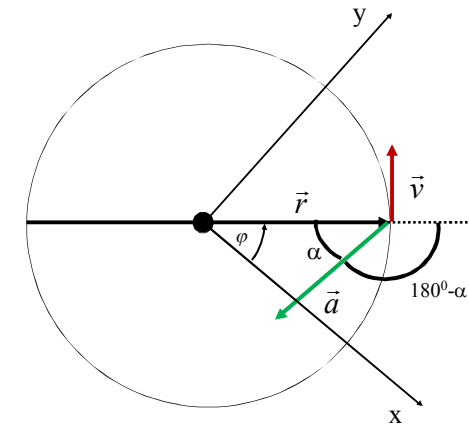
A zatem

$$\frac{1}{u} = \operatorname{tg}(\alpha)t + \frac{1}{\omega_0} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1}$$

$$\varphi = \int \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1} dt$$

$$\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \ln(|\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1|) + D$$



$$\alpha \neq 0$$

Stałą całkowania D wyznaczamy z warunku początkowego $\varphi(t=0)=0$ skąd wynika iż $D=0$.

Ostatecznie $\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \ln(\operatorname{tg}(\alpha)\omega_0 t + 1)$. gdy $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

Gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ Ruch po okręgu nie możliwy (brak przyspieszenia dośrodkowego)- sprzeczność

Gdy $\alpha = 0$ Ruch po okręgu ze stałą prędkością kątową $\varphi = \omega_0 t$