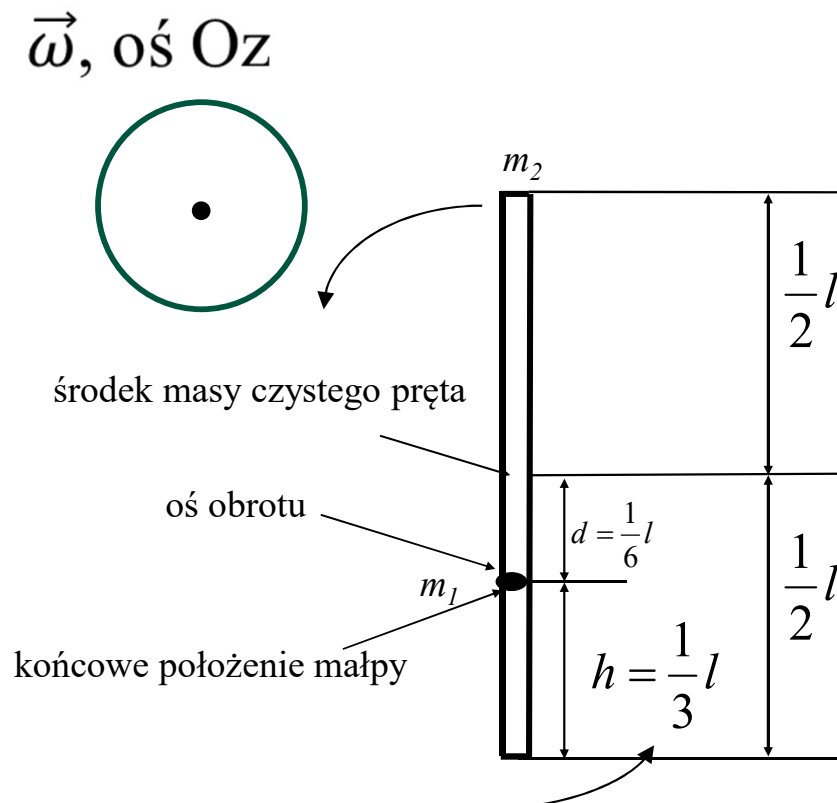
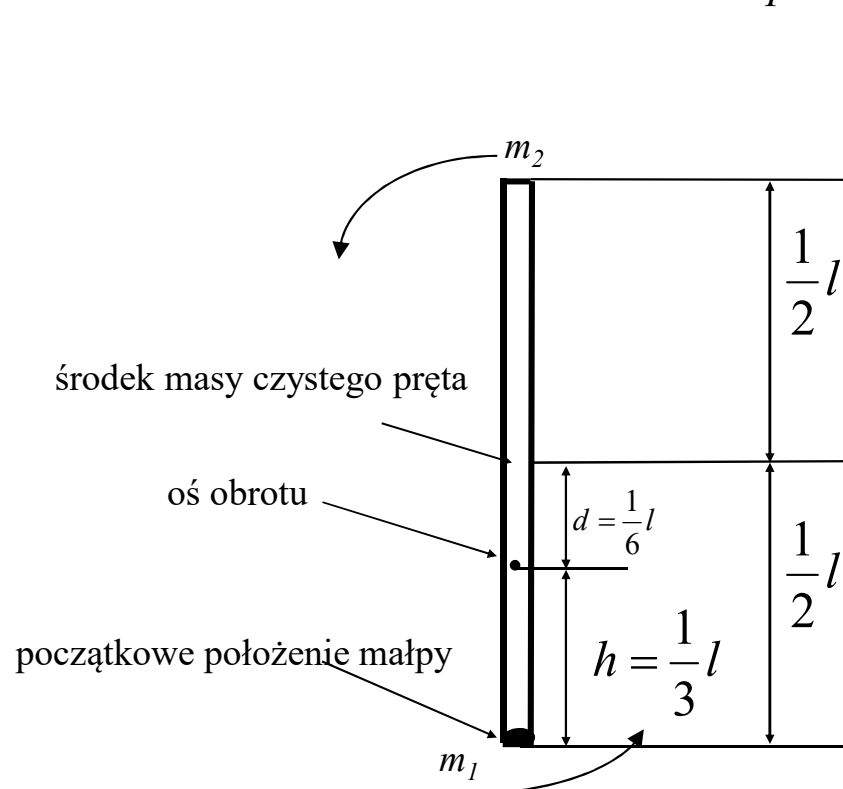


Zad. 2b (seria VII). Na końcu pręta o masie m_2 siedzi małpka o masie m_1 . Pręt ma długość l i wiruje z prędkością kątową o wartości ω_p wokół osi prostopadłej do pręta. Odległość h osi obrotu od końca pręta, na którym siedzi małpka, wynosi $h = \frac{l}{3}$.

Jaka będzie wartość prędkości kątowej pręta ω_k po przejściu małpki do punktu, przez który przechodzi oś obrotu? O ile zmieni się energia kinetyczna układu złożonego z pręta oraz małpki? Założyć, iż przy liczeniu momentu bezwładności układu można małpkę potraktować jak punkt materialny. Moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego środek dany jest wzorem $I_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2$.

Dane $l, h=l/3, m_1, m_2, \omega_p$

Szukane $\omega_k, \Delta E$



Ze względu na to iż rzut wypadkowego zewnętrznego momentu siły liczonego względem punktu na pręcie leżącym na osi obrotu na tę oś jest równy zeru, to rzut moment pędu układu złożonego z małpki i pręta na oś obrotu liczony względem punktu na pręcie leżącym na osi obrotu nie zmienia się w trakcie zmiany położenia małpki.

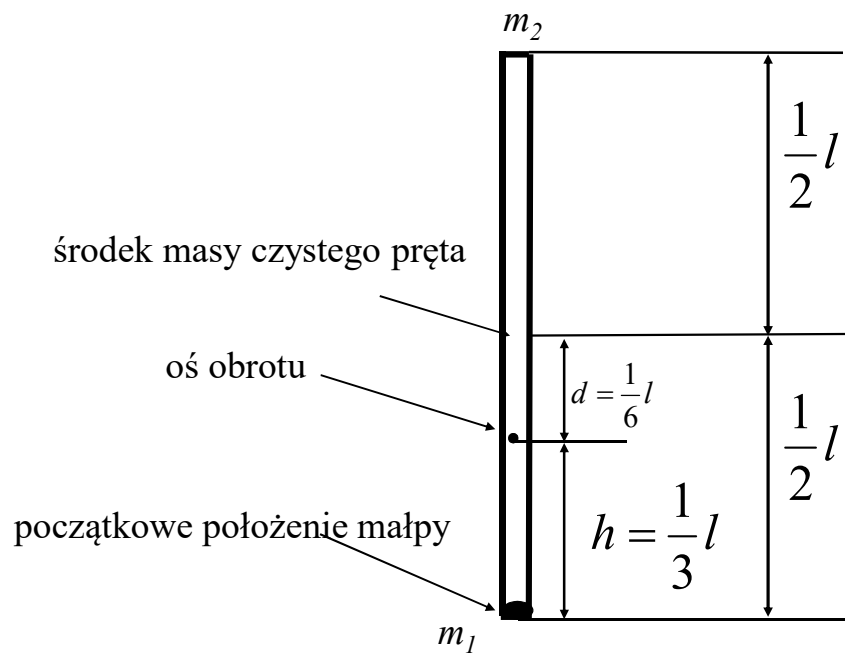
$$L_z = \text{const} \Rightarrow I_p \omega_p = I_k \omega_k$$

$I_p(I_k)$ -moment bezwładności układu złożonego z pręta oraz małpki względem osi obrotu przed zmianą (po zmianie) położenia małpki.

$$I_p \omega_p = I_k \omega_k \Rightarrow \omega_k = \frac{I_p}{I_k} \omega_p$$

Moment bezwładności układu jest równy sumie momentów bezwładności małpki I_m oraz momentu bezwładności czystego pręta I_{pr} .

Określenie I_p – momentu bezwładności układu przed ruchem małpki



Moment bezwładności małpki

$$I_{mp} = m_1 h^2 = m_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} m_1 l^2$$

Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy pręta prostopadłej do pręta $I_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2$

Moment bezwładności pręta względem osi obrotu równoległej do niej odległej od niej o d

$$I_{pr} = I_0 + m_2 d^2 \quad (\text{tw. Steinera})$$

$$d = \frac{l}{2} - h = \frac{l}{6} \Rightarrow I_{pr} = \frac{1}{12} m_2 l^2 + \frac{1}{36} m_2 l^2 = \frac{4}{36} m_2 l^2 = \frac{1}{9} m_2 l^2$$

$$I_p = I_{pr} + I_{mp} = \frac{l^2}{9} (m_2 + m_1)$$

Określenie I_k – momentu bezwładności układu po ruchu małpki

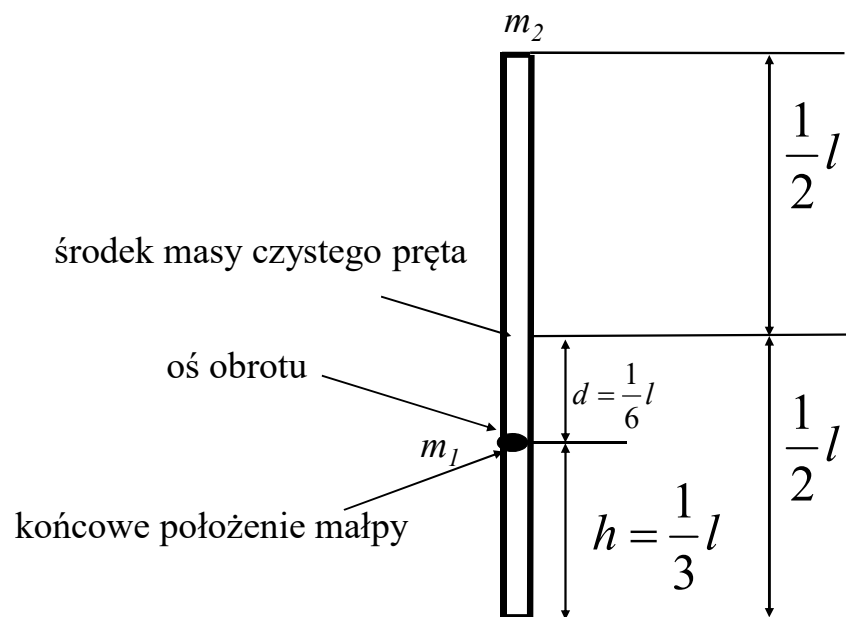
Moment bezwładności małpki

$$I_{mk} = m_1 0^2 = 0$$

Moment bezwładności pręta

$$I_{pr} = \frac{1}{9} m_2 l^2 \quad (\text{nie ulega zmianie})$$

$$I_k = I_{pr} + I_{mk} = \frac{l^2}{9} m_2$$



A zatem końcowa prędkość kątowa ruchu obrotowego

$$\omega_k = \frac{I_p}{I_k} \omega_p = \frac{\frac{l^2}{9} (m_2 + m_1)}{\frac{l^2}{9} m_2} \omega_p = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \omega_p$$

Zmiana energii kinetycznej ruchu obrotowego układu złożonego z pręta i małpki wynikająca ze zmiany położenia małpki jest równa

$$\Delta E = E_k - E_p = \frac{I_k \omega_k^2}{2} - \frac{I_p \omega_p^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 \frac{l^2}{9} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 \omega_p^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{9} (m_2 + m_1) \omega_p^2 =$$

$\omega_k = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \omega_p$

$I_k = \frac{l^2}{9} m_2$

$I_p = \frac{l^2}{9} (m_2 + m_1)$

$$\Delta E = \frac{l^2}{18} \omega_p^2 \left[m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 - (m_2 + m_1) \right] = \frac{l^2}{18} \omega_p^2 \left[m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 - m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right] =$$

$$= \frac{l^2}{18} \omega_p^2 m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \left[1 + \frac{m_1}{m_2} - 1 \right] = \frac{m_1 l^2}{18} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \omega_p^2$$