

***Zadanie 2 (seriaII).** Punkt porusza się po gładkiej elipsoidzie o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (*)$$

bez działania żadnych sił (za wyjątkiem sił reakcji). Wykazać, przy pomocy równań Lagrange'a pierwszego rodzaju, że wartość jego prędkości jest stała.

Wsk. Wykorzystać oprócz równań Lagrange'a pierwszego rodzaju dodatkowo równanie powstałe po zróźniczkowaniu po czasie równania (*).

Rozwiązanie zadania przy pomocy równań Lagrange'a I rodzaju

Siła wypadkowa bez uwzględnienia siły reakcji więzów $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, 0)$

Równanie więzów: $f_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (1)

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = \frac{2\lambda_1 x}{a^2} \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = \frac{2\lambda_1 y}{b^2} \quad (3)$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = \frac{2\lambda_1 z}{c^2} \quad (4)$$

Różniczkowanie po czasie równania więzów (1) prowadzi do relacji $\frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} = 0$ (5)

Wartość prędkości ciała jest równa $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Jest ona stałą ruchu gdy $\frac{dV}{dt} = 0$

Ponieważ $\frac{dV}{dt} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$ to szybkość jest stałą ruchu gdy $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$ (6)

Z równań (2), (3), (4) wynikają relacje

$$\ddot{x} = \frac{2\lambda_1 x}{ma^2} \quad (7)$$

$$\ddot{y} = \frac{2\lambda_1 y}{mb^2} \quad (8)$$

$$\ddot{z} = \frac{2\lambda_1 z}{mc^2} \quad (9)$$

$$\frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{2\lambda_1 x}{ma^2} \qquad \ddot{y} = \frac{2\lambda_1 y}{mb^2} \qquad \ddot{z} = \frac{2\lambda_1 z}{mc^2}$$

(Uwzględnienie powyższych relacji (5) (7),(8), (9) pozwala uzasadnić równość (6) gdyż

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\lambda_1}{m} \left(\frac{2x\dot{x}}{a^2} + \frac{2y\dot{y}}{b^2} + \frac{2z\dot{z}}{c^2} \right) = 0$$

A zatem $\frac{dV}{dt} = 0$ i wartość prędkości ciała nie ulega zmianie podczas ruchu