



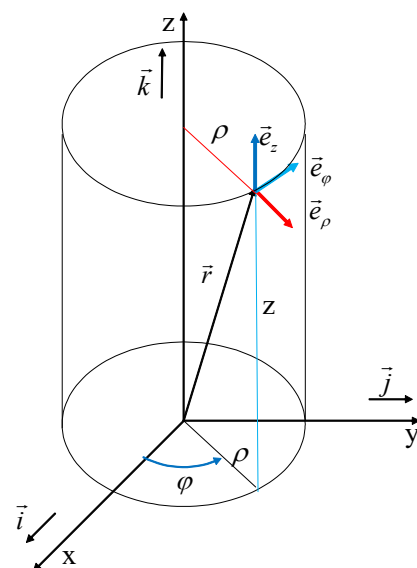
Zadanie 2 (seria I). W układzie cylindrycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne ρ, φ, z których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = \rho \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) \quad z = z$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ cylindrycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych cylindrycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Zapisać w tym układzie operator gradientu.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie $z=0$ kładąc $z=0$ oraz wprowadzając oznaczenie $r = \rho$.



1) Określenie współczynników Lamé:

$$L_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$$L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\varphi)} = \rho$$

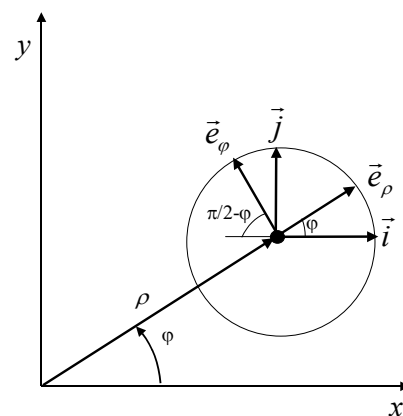
$$L_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

Określenie wersorów układu cylindrycznego:

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{L_\rho} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \vec{k} \right) = \cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\varphi) \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{k} \right) = \frac{1}{\rho} [-\rho \sin(\varphi) \vec{i} + \rho \cos(\varphi) \vec{j}] = -\sin(\varphi) \vec{i} + \cos(\varphi) \vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \frac{1}{L_z} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} \right) = \vec{k}$$





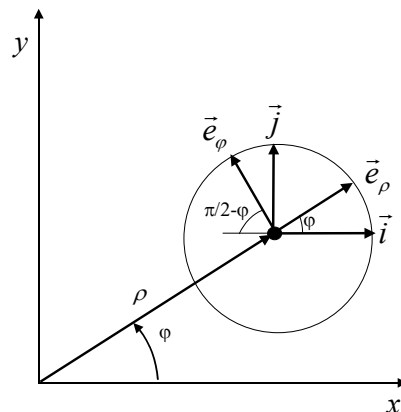
Wersory te spełniają relacje:

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi, \quad (1)$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \text{ gdzie } i, j = \rho, \varphi, z \quad (2)$$

Widać to na przedstawionych rysunkach

2) Określenie składowych wektora wodzącego $\vec{r} = r_\rho \vec{e}_\rho + r_\varphi \vec{e}_\varphi + r_z \vec{e}_z$



$$\text{Ponieważ } |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\varphi) + z^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\text{to } r_\rho = \frac{1}{2L_\rho} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial \rho} = \rho, \quad r_\varphi = \frac{1}{2L_\varphi} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial \varphi} = 0, \quad r_z = \frac{1}{2L_z} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial z} = z$$

Określenie składowych wektora prędkości:

$$v_\rho = L_\rho \dot{\rho} = \dot{\rho} \quad v_\varphi = L_\varphi \dot{\varphi} = \rho \dot{\varphi} \quad v_z = L_z \dot{z} = \dot{z}$$

Składowe te można znaleźć także inaczej

$$\text{Wiadomo iż } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z$$

Wiadomo też że $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$. Należy znaleźć $\dot{\vec{e}}_\rho, \dot{\vec{e}}_\varphi, \dot{\vec{e}}_z$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = [-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}] \dot{\varphi} = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi} \quad (3)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} = [-\cos(\varphi)\vec{i} - \sin(\varphi)\vec{j}] \dot{\varphi} = -\vec{e}_\rho \dot{\varphi} \quad (4)$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \dot{\vec{k}} = 0 \quad (5)$$

Uwzględniając (3) i (5) mamy $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$

Określenie funkcji f w celu wyznaczenia składowych wektora przyspieszenia

$$f = \frac{1}{2} [v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2] = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2]$$

Określenie składowych wektora przyspieszenia:

$$a_\rho = \frac{1}{L_\rho} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}) - \rho \dot{\varphi}^2 = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$$



$$a_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{dt} [\rho^2 \dot{\varphi}] \right] = \frac{1}{\rho} [2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho^2 \ddot{\varphi}] = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}$$

$$a_z = \frac{1}{L_z} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{d}{dt} (\dot{z}) = \ddot{z}$$

Można obliczenia wykonać także w inny sposób

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z) = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z + \dot{z} \dot{\vec{e}}_z$$

Uwzględniając (3), (4) oraz (5)

$$\vec{a} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \ddot{z} \vec{e}_z = [\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2] \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$$

A zatem składowe wektora przyspieszenia:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \quad a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \quad a_z = \ddot{z}$$

Moment pędu można przedstawić jako wielkość proporcjonalną do iloczynu wektorowego wektorów wodzącego i prędkości. Wykorzystując własności (1) i (2) wersorów w układzie krzywoliniowym iloczyn wektorowy można określić licząc wyznacznik odpowiedniej macierzy

$$\vec{L} = (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ r_\rho & r_\varphi & r_z \\ v_\rho & v_\varphi & v_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho \dot{\varphi} & \dot{z} \end{vmatrix} = m [-\rho z \dot{\varphi} \vec{e}_\rho + (\dot{\rho} z - \rho \dot{z}) \vec{e}_\varphi + \rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z]$$

Operator gradientu w układzie cylindrycznym można zapisać wzorem

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{e}_i = \frac{1}{L_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{L_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{L_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

3) Przejście do układu biegunowego

Do opisu ruchu w płaszczyźnie $z=0$ można wprowadzić układ biegunowy, w którym do opisu położenia ciała wykorzystujemy dwie współrzędne r oraz φ . Ponieważ wektor wodzący $\vec{r}$ musi leżeć na płaszczyźnie $z=0$, to należy przyjąć $\dot{z}=0$, $\ddot{z}=0$ oraz $r = |\vec{r}| = \rho$ (czyli współrzędna ρ w układzie cylindrycznym jest równa wielkości r i tak można ją oznaczać). Wówczas wzory określające wersory układu biegunowego oraz składowe wektorów wodzącego, prędkości i przyspieszenia przyjmują postać

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\varphi) \vec{j} \quad \vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \vec{i} + \cos(\varphi) \vec{j} \quad \vec{r} = r \vec{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

(składowa radialna prędkości: $v_r = \dot{r}$, składowa transwersalna prędkości: $v_\varphi = r \dot{\varphi}$)

$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$ (składowa radialna przyspieszenia: $a_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$, składowa transwersalna przyspieszenia: $a_\varphi = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}$)

Wektor momentu pędu $\vec{L} = mr^2 \dot{\varphi} \vec{k}$ jest prostopadły do płaszczyzny w której odbywa się ruch i ma w tym wypadku niezerową tylko składową z-ową.

Operator gradientu w układzie biegunowym można zapisać wzorem: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$.