



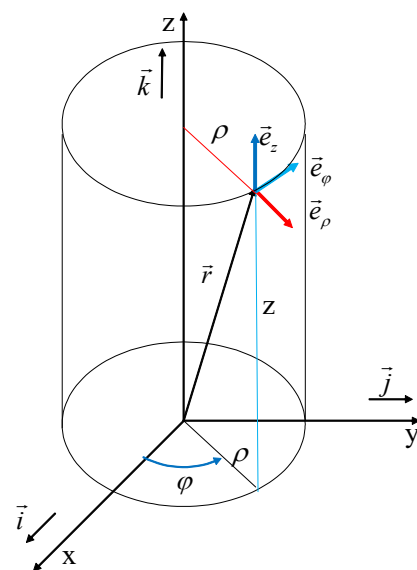
Zadanie 2 (seria I). W układzie cylindrycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne ρ, φ, z których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$$x = \rho \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) \quad z = z$$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ cylindrycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych cylindrycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Zapisać w tym układzie operator gradientu.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie $z=0$ kładąc $z=0$ oraz wprowadzając oznaczenie $r = \rho$.



1) Określenie współczynników Lamé:

$$L_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$$

$$L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\varphi)} = \rho$$

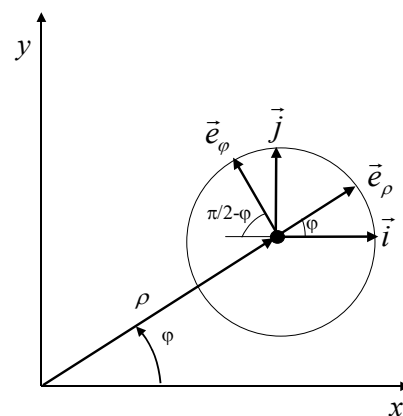
$$L_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

Określenie wersorów układu cylindrycznego:

$$\vec{e}_\rho = \frac{1}{L_\rho} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \vec{k} \right) = \cos(\varphi) \vec{i} + \sin(\varphi) \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{L_\varphi} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{k} \right) = \frac{1}{\rho} [-\rho \sin(\varphi) \vec{i} + \rho \cos(\varphi) \vec{j}] = -\sin(\varphi) \vec{i} + \cos(\varphi) \vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \frac{1}{L_z} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{k} \right) = \vec{k}$$





Wersory te spełniają relacje:

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi, \quad (1)$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \text{ gdzie } i, j = \rho, \varphi, z \quad (2)$$

Widać to na przedstawionych rysunkach

2) Określenie składowych wektora wodzącego $\vec{r} = r_\rho \vec{e}_\rho + r_\varphi \vec{e}_\varphi + r_z \vec{e}_z$

$$\text{Ponieważ } |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\varphi) + z^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\text{to } r_\rho = \frac{1}{2L_\rho} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial \rho} = \rho, \quad r_\varphi = \frac{1}{2L_\varphi} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial \varphi} = 0, \quad r_z = \frac{1}{2L_z} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial z} = z$$

Określenie składowych wektora prędkości:

$$v_\rho = L_\rho \dot{\rho} = \dot{\rho} \quad v_\varphi = L_\varphi \dot{\varphi} = \rho \dot{\varphi} \quad v_z = L_z \dot{z} = \dot{z}$$

Składowe te można znaleźć także inaczej

$$\text{Wiadomo iż } \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z$$

Wiadomo też że $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$. Należy znaleźć $\dot{\vec{e}}_\rho, \dot{\vec{e}}_\varphi, \dot{\vec{e}}_z$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \dot{\varphi} = [-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}] \dot{\varphi} = \vec{e}_\varphi \dot{\varphi} \quad (3)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} = [-\cos(\varphi)\vec{i} - \sin(\varphi)\vec{j}] \dot{\varphi} = -\vec{e}_\rho \dot{\varphi} \quad (4)$$

$$\dot{\vec{e}}_z = \dot{\vec{k}} = 0 \quad (5)$$

Uwzględniając (3) i (5) mamy $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$

