



OMNIS2

Zadanie 2 (seria V). Elektron o ładunku $e < 0$ i masie m porusza się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego opisanego potencjałem wektorowym $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ oraz skalarnym $\varphi = 0$ gdzie B -stała, y -kowa składowa wektora wodzącego elektronu.

- 1) Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.
- 2) Znaleźć funkcje Lagrange'a, pędy uogólnione oraz funkcje Hamiltona i napisać równania Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Które z pędów uogólnionych są stałymi (całkami) ruchu?
- 3) Pokazać iż w przypadku gdy ruch elektronu jest ograniczony do płaszczyzny $z=0$ to funkcje Hamiltona

można przedstawić jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego: $H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_k)^2$ gdzie

$$\omega_c = \frac{|e|B}{m}, \quad y_k \text{ - stała.}$$

Wektor indukcji pola magnetycznego:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -By & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (-By)}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (-By)}{\partial y} \right) = B\vec{k} = [0, 0, B]$$

Wektor natężenia pola elektrycznego: $\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$

Cząstka porusza się więc w obszarze stałego jednorodnego pola magnetycznego o indukcji o wartości B skierowanego wzdłuż osi Oz.



Potencjał uogólniony $U = -e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} + e\varphi$

$$\varphi = 0, \quad \vec{A} = [A_x, A_y, A_z] = [-By, 0, 0], \quad \dot{\vec{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] \Rightarrow U = -e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} + e\varphi = eB\dot{x}y$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eB\dot{x}y$

Ponieważ nie ma narzuconych żadnych więzów na cząstkę to współzrędnymi uogólnionymi mogą być składowe wektora wodzącego w dowolnym układzie współrzędnych np. układzie kartezjańskim $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

Dodatek : Równania Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - eBy \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} - eB\dot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - eB\dot{y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -eB\dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + eB\dot{x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 0$$

Można pokazać iż uzyskane równania są identyczne z równaniami powstałymi z rozpisania na składowe poniższego równania wektorowego

$$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = e\dot{y}B\vec{i} - e\dot{x}B\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eB\dot{x}y$$

Pędy uogólnione

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - eBy \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Ponieważ $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ to można sprawdzić iż

$$p_x = m\dot{x} + eA_x \quad p_y = m\dot{y} + eA_y \quad p_z = m\dot{z} + eA_z$$

Uogólniona energia (funkcja G) $G = \sum_{l=1}^f p_l(q, \dot{q}, t) \dot{q}_l - L$

$$G = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eB\dot{x}y$$

$$G = m\dot{x}^2 - \dot{x}eBy + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eB\dot{x}y = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T$$

Energia ta w rozważanym przypadku jest równa energii kinetycznej.

$$G = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Funkcja Hamiltona $H = G(q, \dot{q}(q, p, t)t)$

$$p_x = m\dot{x} - eBy \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x + eBy}{m}$$

$$p_y = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H = \frac{1}{2m}[(p_x + eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2]$$

Uwzględniając to iż $\vec{A} = [-By, 0, 0]$ i $\varphi = 0$ to widać iż wzór powyższy ma postać

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi \quad \text{gdzie } \vec{p} = [p_x, p_y, p_z]$$

Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu?

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x + eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2]$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x + eBy}{m} \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

Uzyskane relacje są zgodne z tymi definiującymi pędy uogólnione

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \Rightarrow \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{eB}{m}(p_x + eBy) \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

Które pędy są stałymi ruchu? $\dot{p}_x = 0 \Rightarrow p_x = m\dot{x} - eBy = const$ $\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z = m\dot{z} = const$

Oczywiście zachodzi więc $\dot{p}_x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - eB\dot{y} = 0 \rightarrow$ relacja zgodna z jednym z równań Lagrange'a II rodzaju

Ograniczenie ruchu cząstki do płaszczyzny z=0

$$z = const = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0, \quad p_z = m\dot{z} = 0$$

Funkcja Hamiltona przyjmuje postać $H = \frac{1}{2m} [(p_x + eBy)^2 + p_y^2]$

$$p_x = const = \alpha \Rightarrow H = \frac{1}{2m} [(\alpha + eBy)^2 + p_y^2] = \frac{1}{2m} (\alpha + eBy)^2 + \frac{p_y^2}{2m}$$

$$H = \frac{e^2 B^2}{2m} \left(\frac{\alpha}{eB} + y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} = \frac{1}{2} m \omega_c^2 (-y_k + y)^2 + \frac{p_y^2}{2m}$$

gdzie $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$ - częstość cyklotronowa $y_k = -\frac{\alpha}{eB} = \frac{\alpha}{|e|B}$ -stała

Funkcja Hamiltona ma taką samą postać jak funkcja Hamiltona dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego drgającego wokół punktu $y = y_k$ z częstością cyklotronową