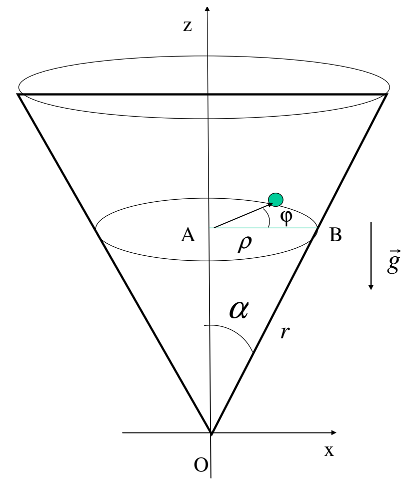
Zad. 2 (seria V)

Punkt materialny o masie *m* porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, zwróconego wierzchołkiem w dół. Wiadomo, iż kąt między osią symetrii stożka Oz a tworzącą stożka wynosi α .



Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego *g*.
Znaleźć funkcję Hamiltona i napisać równania kanoniczne Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Czy można znaleźć współrzędną uogólnioną dla której pęd uogólniony związany z tą współrzędną jest stałą ruchu?

Wybór współrzędnych uogólnionych

2 stopnie swobody $f=2$, 2 współrzędne uogólnione.

Współrzędnymi tymi mogą być np. dwie z trzech współrzędnych w układzie sferycznym

a) współrzędna *r* określająca odległość ciała od wierzchołka stożka

b) kat azymutalny φ

Kąt biegunowy θ nie jest współrzędną uogólnioną i ma stałą wartość równą $\theta = \alpha$.

Związek współrzędnych uogólnionych ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$x = \rho\cos(\varphi) = r\sin(\alpha)\cos(\varphi) \qquad y = \rho\sin(\varphi) = r\sin(\alpha)\sin(\varphi) \qquad z = r\cos(\alpha)$$

Równanie więzów ma postać: $f = \sqrt{x^2 + y^2} - z\,tg(\alpha) = 0$ gdyż $tg(\alpha) = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$

Nie zależy ono jawnie od czasu. Nie wprowadza ograniczenia na wartości przyjmowane przez współrzędne uogólnione φ oraz r

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} - z\,tg(\alpha) = \sqrt{r^2\sin^2(\alpha)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)} - r\cos(\alpha)tg(\alpha) = r\sin(\alpha) - r\sin(\alpha) \equiv 0$$

Energia kinetyczna:

I sposób $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$

$$x = r\sin(\alpha)\cos(\varphi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \sin(\alpha)\cos(\varphi)\dot{r} - r\sin(\alpha)\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$y = r\sin(\alpha)\sin(\varphi) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \sin(\alpha)\sin(\varphi)\dot{r} + r\sin(\alpha)\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$z = r\cos(\alpha) \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r} = \cos(\alpha)\dot{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right)$$

II sposób $T = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right)$

gdzie składowe prędkości w ortogonalnym układzie sferycznym

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_\varphi = r\sin(\theta)\dot{\varphi}$$

$$\theta = \alpha = const \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \quad v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = 0 \qquad v_\varphi = r\sin(\alpha)\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right)$$

Potencjał (energia potencjalna) $\vec{F} = -gradV$

$$\left\{\begin{array}{c} F_x = 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -mg = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right\} \Rightarrow V = V(z) = mgz$$

Potencjał zależy od współrzędnej *z,* którą **nie** przyjęliśmy jako współrzędną uogólnioną, w związku czym trzeba go uzależnić od współrzędnych uogólnionych

$$z = r\cos(\alpha) \Rightarrow \quad V = mgz = mgr\cos(\alpha)$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos(\alpha)$

Pędy uogólnione: $p_l = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$ *(l=1,...,f=2)*

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}$$

Uogólniona energia: $G = \sum_{l=1}^{f=2} \dot{q}_l p_l(q,\dot{q}) - L$

$$G = \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L = \quad m\dot{r}^2 + mr^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos(\alpha) =$$

$$G = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos(\alpha)$$

$G = T + V$ gdyż relacje pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zależą jawnie od czasu i *V* nie zależy od prędkości (zwykły potencjał a nie uogólniony)

Funkcja Hamiltona $H(r, p_r, p_\varphi) = G(r, \dot{r}(r, p_r, p_\varphi), \dot{\varphi}(r, p_r, p_\varphi))$

$$p_r = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha)\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$G = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha)\dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$H(r, p_r, p_\varphi) = G(r, \dot{r}(p_r), \dot{\varphi}(r, p_\varphi)) = \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2(\alpha)\frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4(\alpha)}\right) + mgr\cos(\alpha)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr\cos(\alpha)$$

Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu ?

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const$$

$$H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr\cos(\alpha)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \qquad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

(l=1,...f) *f=2*

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2(\alpha)} - mg\cos(\alpha)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha)\dot{\varphi} = const$$

Pęd p_φ jest stałą ruchu i jest on równy z -owej składowej momentu pędu bo

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha)\dot{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z$$

Dodatkowy wniosek

Ponieważ $p_\varphi = const = L_z$ to funkcje Hamiltona można zapisać wzorem

$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr\cos(\alpha) = \frac{p_r^2}{2m} + V_{ef}(r)$$

gdzie potencjał efektywny $V_{ef}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr\cos(\alpha)$

Ponieważ $\frac{p_r^2}{2m} \geq 0$, zaś $H = E$ to w trakcie ruchu musi zachodzić relacja $V_{ef}(r) \leq E$

Gdy $L_z \neq 0$ to $\lim_{r \to 0} V_{ef}(r) = \infty$, ponadto $\lim_{r \to \infty} V(r) = \infty$

a zatem w trakcie ruchu gdy $L_z \neq 0$ i energia pozostaje skończona to $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$

Wynika stąd iż ciało nie może osiągnąć wierzchołka stożka.

Wniosek dodatkowy z zadania

Gdy funkcja Lagrange'a ma postać $L = L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

(w przykładzie $q_1 = r$ oraz $\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\varphi}$) to $\dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = const$

i funkcja Hamiltona zależy tylko od 2 zmiennych zależnych od czasu :

współrzędnej q_1 i pędu $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ (w przykładzie r oraz p_r) czyli $H = H(q_1, p_1)$

Pęd p_2 (w zadaniu $p_2 = p_\varphi = L_z$) jest stałą ruchu i można go wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.

Powyższe uproszczenie nie zachodzi dla funkcji Lagrange'a gdyż z tego iż

$p_2 = const$ nie wynika iż $\dot{q}_2 = const$

W ogólności może zachodzić $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \neq const$ nawet wtedy gdy $p_2 = const$

(w przykładzie $\dot{\varphi} \neq const$ mimo tego iż $p_\varphi = mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi} = L_z = const$)

Ogólnie Gdy wśród *f* współrzędnych uogólnionych *k* współrzędnych jest współrzędnymi cyklicznymi (czyli funkcje Lagrange'a i Hamiltona od nich nie zależą) to funkcja Hamiltona zależy tylko od *f-k* współrzędnych i pędów zależnych od czasu (może też jawnie zależeć od czasu). Pozostałe *k* pędów (sprzężonych kanonicznie ze współrzędnymi cyklicznymi) występujących w funkcji Hamiltona jest stałymi ruchu i można je wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.