



Zadanie 2 (seria III)

Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju oraz wyznaczyć ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, -mg)$ po gładkiej odwróconej cykloidzie. Równanie parametryczne krzywej, po której porusza się punkt materialny:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R(\varphi + \sin(\varphi)) & y(\varphi) &= R(1 - \cos(\varphi)) & R &= \text{const} \\ -\pi &\leq \varphi < \pi \end{aligned}$$

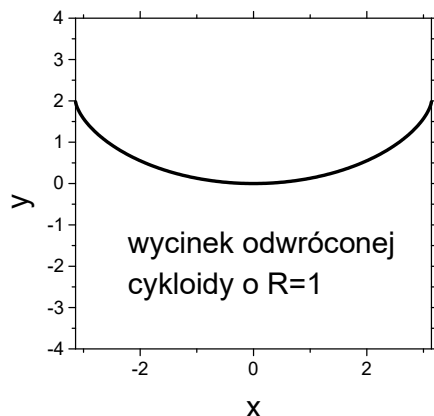
Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Wsk. Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć parametr φ . Przed rozwiązaniem równania Lagrange'a II rodzaju dokonać zamiany zmiennej φ na zmienną u określoną jako

$$u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-4R \leq u < 4R).$$

Moduł u jest równy długości łuku cykloidy pomiędzy punktami określonymi przez $\varphi_p = 0$ oraz $\varphi_k = \varphi$. Można także przyjąć u jako współrzędną uogólnioną i wyrazić znalezioną funkcję Lagrange'a $L(\varphi, \dot{\varphi})$ jako funkcję tej nowej współrzędnej uogólnionej i jej pochodnej po czasie czyli znaleźć $L(u, \dot{u})$ po czym zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współrzędną uogólnioną współrzędną u .





Równanie parametryczne wycinka odwróconej cykloidy leżącej na płaszczyźnie o równaniu: $z=0$:

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \quad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \quad -\pi \leq \varphi < \pi$$

$$x(\varphi = 0) = y(\varphi = 0) = 0 \quad y(\varphi = \pm\pi) = 2R$$

$$x(\varphi = \pi) = R\pi \quad x(\varphi = -\pi) = -R\pi$$

Jeden stopień swobody $f=1$, jedna współrzędna uogólniona. Może być nią np. $q_1 = \varphi$
(choć inny wybór współrzędnej prowadzi do prostszego do rozwiązania różniczkowego równania ruchu)

Wyznaczenie energii kinetycznej

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R(1 + \cos(\varphi))\dot{\varphi}$$

$$y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R \sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 [(1 + \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)] = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 [1 + 2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)]$$

$$T(\varphi, \dot{\varphi}) = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos(\varphi))$$

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \Rightarrow \quad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow$$

Wyznaczenie energii potencjalnej V

$$\vec{F} = -\text{grad}V$$

$$F_x = 0, F_y = -mg$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \quad V = mgy$$

Energie potencjalną trzeba także uzależnić od współrzędnej uogólnionej φ

$$y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow V = mgR(1 - \cos(\varphi))$$

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = T - V = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos(\varphi)) - mgR(1 - \cos(\varphi))$$

Zapis równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, \dots, f$$

$$f = 1, q_1 = \varphi \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = T - V = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos(\varphi)) - mgR(1 - \cos(\varphi))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mR^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 - mgR \sin(\varphi) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2 [1 + \cos(\varphi)] \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \ddot{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \dot{\varphi} = 2mR^2 [1 + \cos(\varphi)] \ddot{\varphi} - 2mR^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow 2mR^2 [1 + \cos(\varphi)] \ddot{\varphi} - 2mR^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mR^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mgR \sin(\varphi) = 0$$

$$2mR^2 [1 + \cos(\varphi)] \ddot{\varphi} - mR^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mgR \sin(\varphi) = 0$$

Przekształcenia otrzymanego równania w celu jego uproszczenia

$$1 + \cos(\varphi) = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \sin(\varphi) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$4mR^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ddot{\varphi} - 2mR^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi}^2 + 2mgR \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

Dzielimy obydwie strony przez $2mR \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ddot{\varphi} - R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi}^2 + g \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$

$$2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi} - R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2 + g \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \quad (*)$$

Wprowadzamy nową zmienną: $u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = -R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi}^2 + 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ddot{\varphi}$$

Równanie (*) przyjmuje postać: $\ddot{u} + \frac{g}{4R} u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \omega^2 u = 0$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$

(równanie z punktu widzenia matematyki takie jak dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z wychyleniem u oraz częstością kołową drgań $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$)

Prostszy sposób dojścia do równania ruchu $\ddot{u} + \frac{g}{4R} u = 0$

Przed zapisaniem równania ruchu można uzależnić funkcję Lagrange'a od zmiennej u i jej pochodnej po czasie traktując u jako współrzędną uogólnioną

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos(\varphi)) - mgR(1 - \cos(\varphi)) = 2mR^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2mgR \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{u^2}{16R^2}$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\dot{u}^2}{4R^2}$$

$$\Rightarrow L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{mg}{8R} u^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m \dot{u}) + \frac{mg}{4R} u = 0 \Rightarrow m \ddot{u} + \frac{mg}{4R} u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \frac{g}{4R} u = 0$$

Czym jest wielkość u $u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Wielkość $|u(\varphi)|$ określa długość łuku cycloidy mierzoną pomiędzy punktami na cycloidzie określonymi przez $\varphi_p = 0$ (najniżej położony punkt na odwróconej cycloidzie) oraz $\varphi_k = \varphi$. Wielkość u podobnie jak φ charakteryzuje jednoznacznie położenie ciała na łuku odwróconej cycloidy. Może ona przyjmować dowolne wartości z zakresu $\langle -4R, 4R \rangle$.

Dowód:

Długość dS infinitezymalnie małego wycinka cycloidy: $dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = R(1 + \cos(\varphi))d\varphi \quad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = R \sin(\varphi)d\varphi$$

$$dS = \sqrt{R^2(1 + \cos(\varphi))^2(d\varphi)^2 + R^2 \sin^2(\varphi)(d\varphi)^2} = \sqrt{2R^2(d\varphi)^2(1 + \cos(\varphi))} = 2R \left| \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \right| = 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) |d\varphi|$$

Zmienna u dla $\varphi = \varphi_k > 0$ jest równa $S = \int_0^{\varphi_k} dS = 2R \int_0^{\varphi_k} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 4R \sin\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) = u(\varphi = \varphi_k)$

Rozwiązanie równania ruchu $\ddot{u} + \frac{g}{4R}u = 0$

$$u = A \cos(\omega t + \delta) \quad \text{gdzie} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{4R}} \quad A, \delta \text{ - stałe zależne od warunków początkowych ruchu}$$

Ciało wychylone z położenia równowagi $\varphi = 0$ do punktu o dowolnym $\varphi \neq 0$ takim że $|\varphi| \leq \pi$

wykonuje drgania wokół punktu $\varphi = 0$ o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}} = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ (wahadło izochroniczne)

