Zadanie 2 (seria III)

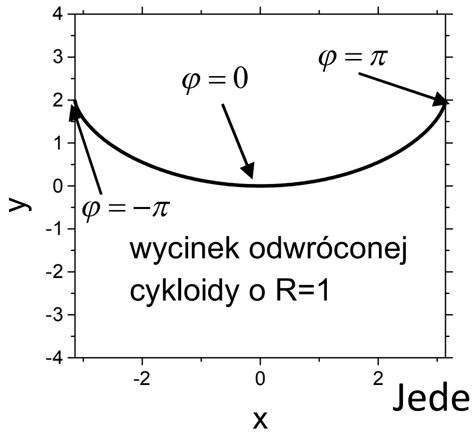
Zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju oraz wyznaczyć ruch punktu materialnego w polu siły ciężkości $\vec{F} = (0, -mg)$ po gładkiej odwróconej cykloidzie. Równanie parametryczne krzywej, po której porusza się punkt materialny:

$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi))$ $\quad$ $y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi))$ $\quad$ R=const

$-\pi \le \varphi < \pi$

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Wsk. Jako współrzędną uogólnioną można przyjąć parametr φ. Przed rozwiązaniem równania Lagrange'a II rodzaju dokonać zamiany zmiennej φ na zmienną u określoną jako $u = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ ($-4R \le u < 4R$). Moduł u jest równy długości łuku cykloidy pomiędzy punktami określonymi przez $\varphi_p = 0$ oraz $\varphi_k = \varphi$. Można także przyjąć u jako współrzędną uogólnioną i wyrazić znalezioną funkcje Lagrange'a $L(\varphi, \dot{\varphi})$ jako funkcję tej nowej współrzędnej uogólnionej i jej pochodnej po czasie czyli znaleźć $L(u, \ddot{u})$ po czym zapisać równanie Lagrange'a II rodzaju przyjmując jako współrzędną uogólnioną współrzędną u.



Równanie parametryczne wycinka odwróconej cykloidy leżącej na płaszczyźnie o równaniu: z=0:

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \qquad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \qquad -\pi \le \varphi < \pi$$

$$x(\varphi = 0) = y(\varphi = 0) = 0 \qquad y(\varphi = \pm\pi) = 2R$$

$$x(\varphi = \pi) = R\pi \qquad x(\varphi = -\pi) = -R\pi$$

Jeden stopień swobody f=1, jedna współrzędna uogólniona. Może być nią np. $q_1 = \varphi$

(choć potem zobaczymy iż inny wybór współrzędnej prowadzi do prostszego do rozwiązania różniczkowego równania ruchu)

Wyznaczenie energii kinetycznej *T* dla funkcji Lagrange'a $T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$

$$x(\varphi)=R(\varphi+\sin(\varphi))\Rightarrow \dot{x}=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi}= R(1+\cos(\varphi))\dot{\varphi}$$

$$y(\varphi)=R(1-\cos(\varphi))\Rightarrow \quad \dot{y}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi}= R\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2\left[(1+\cos(\varphi))^2+\sin^2(\varphi)\right]=\frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2\left[1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right]$$

$$\boxed{T(\varphi,\dot{\varphi})=mR^2\dot{\varphi}^2(1+\cos(\varphi))}$$

Wyznaczenie energii potencjalnej dla funkcji Lagrange'a $\vec{F}=-gradV$

$$F_x=0, F_y=-mg$$

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}, F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow \quad V=mgy$$

Energie potencjalną trzeba także uzależnić od współrzędnej uogólnionej φ

$$y(\varphi)=R(1-\cos(\varphi))\Rightarrow \boxed{V=mgR(1-\cos(\varphi))}$$

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a

$$\boxed{L(\varphi,\dot{\varphi})=T-V=mR^2\dot{\varphi}^2(1+\cos(\varphi))-mgR(1-\cos(\varphi))}$$

Zapis równania Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_l}=0 \qquad l=1,\ldots\ldots,f$

:

$$f=1, q_1=\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0}$$

$$L(\varphi,\dot{\varphi})=T-V=mR^2\dot{\varphi}^2(1+\cos(\varphi))-mgR(1-\cos(\varphi))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-mR^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2-mgR\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=2mR^2[1+\cos(\varphi)]\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)\ddot{\varphi}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)\dot{\varphi}=2mR^2[1+\cos(\varphi)]\ddot{\varphi}-2mR^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \quad 2mR^2[1+\cos(\varphi)]\ddot{\varphi}-2mR^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2+mR^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2+mgR\sin(\varphi)=0$$

$$\boxed{2mR^2[1+\cos(\varphi)]\ddot{\varphi}-mR^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2+mgR\sin(\varphi)=0}$$

Przekształcenia otrzymanego równania w celu jego uproszczenia

$$1+\cos(\varphi)=\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \sin(\varphi)=2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$4mR^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi}-2mR^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2+2mgR\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)=0$$

Dzielimy obydwie strony przez $2mR\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi}-R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2+g\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)=0}$

$$2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi} - R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2 + g\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \qquad (*)$$

Wprowadzamy nową zmienną: $u = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \ddot{u} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{\varphi}}\ddot{\varphi} = -R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\dot{\varphi}^2 + 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ddot{\varphi}$$

Równanie (*) przyjmuje postać:

$$\ddot{u} + \frac{g}{4R}u = 0 \Rightarrow \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0$$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$

(równanie z punktu widzenia matematyki takie jak dla jednowymiarowego

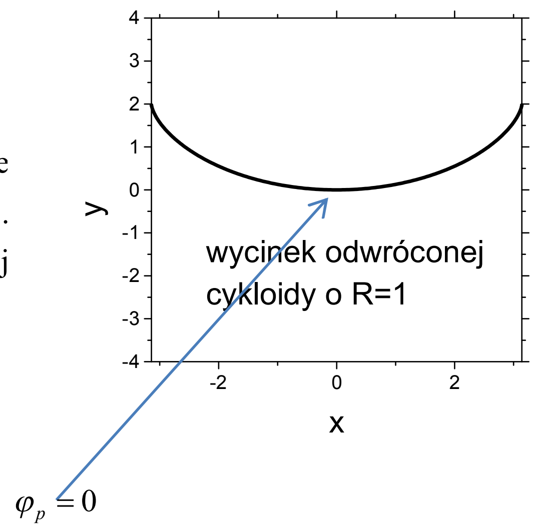
oscylatora harmonicznego z wychyleniem u oraz częstością kołową drgań $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$)

Ogólne rozwiązanie równania $u = A\cos(\omega t + u_0)$

gdzie A, φ_0 –stałe zależne od warunków początkowych ruchu .

gdzie A, u_0 –stałe zależne od warunków początkowych ruchu

Czym jest wielkość u $\quad u = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$



Wielkość $|u(\varphi)|$ określa długość łuku cykloidy mierzoną pomiędzy punktami na cykloidzie określonymi przez $\varphi_p = 0$ (najniżej położony punkt na odwróconej cykloidzie) oraz $\varphi_k = \varphi$. Wielkość u podobnie jak φ charakteryzuje jednoznacznie położenie ciała na łuku odwróconej cykloidy. Może ona przyjmować dowolne wartości z zakresu $\langle -4R, 4R\rangle$.

Dowód:

Długość dS infinitezymalnie małego wycinka cykloidy:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$x(\varphi) = R(\varphi + \sin(\varphi)) \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = R(1 + \cos(\varphi))d\varphi \qquad y(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = R\sin(\varphi)d\varphi$$

$$dS = \sqrt{R^2(1+\cos(\varphi))^2(d\varphi)^2 + R^2\sin^2(\varphi)(d\varphi)^2} = \sqrt{2R^2(d\varphi)^2(1+\cos(\varphi))} = 2R\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi\right| = 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|d\varphi|$$

Zmienna u dla $\varphi = \varphi_k > 0$ jest równa $\quad S = \int_0^{\varphi_k} dS = 2R\int_0^{\varphi_k}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 4R\sin\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) = u(\varphi = \varphi_k)$

Podsumowanie

$$u = A\cos(\omega t + u_0) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$$

Ciało wychylone z położenia równowagi $\varphi = 0$ do punktu o dowolnym $\varphi \neq 0$ takim że $|\varphi| \leq \pi$ wykonuje drgania wokół punktu $\varphi = 0$ o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (wahadło izochroniczne)

Prostszy sposób dojścia do równania ruchu $\ddot{u} + \frac{g}{4R} u = 0$

Przed zapisaniem równania ruchu można uzależnić funkcje Lagrange'a od zmiennej *u* i jej pochodnej po czasie traktując *u* jako współrzędną uogólnioną

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos(\varphi)) - mgR(1 - \cos(\varphi)) = 2mR^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2mgR \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$u = 4R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{u^2}{16R^2}$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 2R \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\dot{u}^2}{4R^2}$$

$$\Rightarrow L(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{mg}{8R} u^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{u}) + \frac{mg}{4R} u = 0 \Rightarrow m\ddot{u} + \frac{mg}{4R} u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \frac{g}{4R} u = 0$$