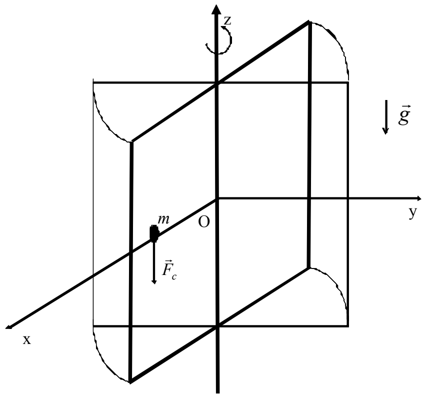
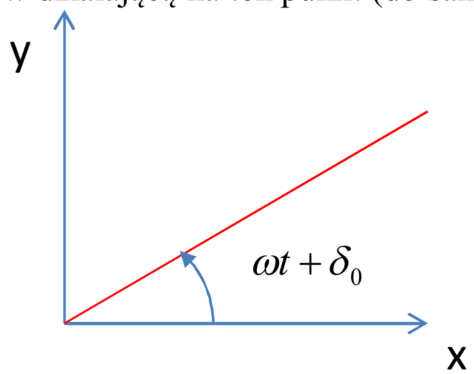
Zadanie 2 seria II

Pionowo ustawiona płaszczyzna obraca się dookoła osi Oz, która zawiera się w tej płaszczyźnie. Obrót następuje ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}=(0,0,\omega)$. Po płaszczyźnie porusza się punkt materialny o masie m, na który w układzie inercjalnym działa siła ciężkości $\vec{F}_c=(0,0,-mg)$ (g- znana wartość przyspieszenia ziemskiego). Znane są warunki początkowe ruchu: $x(t=0)=x_0>0$, $y(t=0)=0$, $z(t=0)=0$ oraz $\dot{x}(t=0)=0, \dot{z}(t=0)=\dot{z}_0$.



a) Wyznaczyć ruch tego punktu korzystając z zasady d'Alemberta
b) Wykorzystując formalizm prowadzący do równań Lagrange'a I rodzaju pokazać iż składowa z-owa siły reakcji jest równa zeru $F_{Rz}=0$, oraz zachodzi poniższa relacja wiążąca ze sobą składowe x-ową F_{Rx} i y-ową F_{Ry} siły reakcji $F_{Ry}\sin(\omega t)=-F_{Rx}\cos(\omega t)$
c) Określić siłę reakcji więzów działającą na ten punkt (do samodzielnego rozwiązania).

Równanie więzów



Współrzędne ciała poruszającego się po płaszczyźnie obracającej się wokół osi Oz z prędkością kątową $\vec{\omega}=[0,0,\omega]$ muszą spełniać relacje

$$\frac{y}{x}=tg(\omega t+\delta_0)=\frac{\sin(\omega t+\delta_0)}{\cos(\omega t+\delta_0)}$$

gdzie δ_0 zależy od ustawienia płaszczyzny w chwili czasu t=0.

$$x(t=0)=x_0>0, \qquad y(t=0)=0 \Rightarrow \delta_0=0 \qquad \frac{y}{x}=\frac{\sin(\omega t+\delta_0)}{\cos(\omega t+\delta_0)} \Rightarrow f_1(x,y,t)=y\cos(\omega t)-x\sin(\omega t)=0$$

a) Wyznaczenie ruchu ciała przy pomocy zasady d'Alemberta

Analizujemy ruch pojedynczego punktu materialnego po powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej

Równania więzów (p=1):

$f_1(x, y, t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$ wiąz reonomiczny

Warunek na wektor przesunięcia wirtualnego $\delta\vec{r}$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0 \Rightarrow -\sin(\omega t)\delta x + \cos(\omega t)\delta y = 0 \Rightarrow \quad \cos(\omega t)\delta y = \sin(\omega t)\delta x$$

Siła wypadkowa $\vec{F} = [0,0,-mg]$.

Zapis głównego równania zasady d'Alemberta $(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$

$$-m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y - (mg + m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}\cos(\omega t)\delta x - m\ddot{y}\cos(\omega t)\delta y - (mg + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-m\ddot{x}\cos(\omega t) - m\ddot{y}\sin(\omega t))\delta x - (mg + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0$$

Równanie powyższe musi być spełnione dla dowolnych δx i δz (także równych zeru) gdyż warunek (*) wprowadzający ograniczenia na wektor $\delta\vec{r}$ już wykorzystano eliminując δy

1) $\delta_x = 0 \Rightarrow -(mg + m\ddot{z})\cos(\omega t)\delta z = 0$

δ_z dowolne $\Rightarrow$ $-(mg + m\ddot{z})\cos(\omega t) = 0 \Rightarrow mg + m\ddot{z} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -g}$

2) $\delta_z = 0 \Rightarrow (-m\ddot{x}\cos(\omega t) - m\ddot{y}\sin(\omega t))\delta x = 0$

δ_x dowolne $\Rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x}\cos(\omega t) + m\ddot{y}\sin(\omega t) = 0}$

Dwa równania ruchu bo układ ma 2 stopnie swobody (ruch 1 punktu materialnego po powierzchni)

Równania te trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równania więzów

$f_1(x, y, t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$

Rozwiązanie równania $\ddot{z} = -g$

Równanie więzów $f_1(x,y,t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$ nie wprowadza ograniczenia na zmienną z występującą w analizowanym równaniu

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = B - gt \Rightarrow z = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0 \Rightarrow B = \dot{z}_0$$

$$\Rightarrow z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Rozwiązanie równania $m\ddot{x}\cos(\omega t) + m\ddot{y}\sin(\omega t) = 0$

Równanie więzów $f_1(x,y,t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$ wprowadza związek miedzy zmiennymi x i y , które trzeba uwzględnić rozwiązując równanie ruchu . Można uzależnić np. w oparciu o równanie więzów y od x i w oparciu o tą relację uzależnić $\ddot{y}$ od x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t otrzymując równanie zależne tylko od x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t

Otrzymane równanie bardzo skomplikowane , problemy dla chwil czasu gdy $\cos(\omega t) = 0$

Problem można uprościć wprowadzając nową zmienną ρ, na wielkość której nie wprowadza równanie więzów ograniczeń, a która to zmienna wraz ze zmienną z w pełni opisuje położenie ciała na płaszczyźnie. Wielkością tą może być x'-owa składowa wektora wodzącego ciała w układzie obracającym się wokół osi Oz z prędkością kątową $\vec{\omega} = [0,0,\omega]$ o osi Oz' pokrywającej się z osią Oz i osi Ox' stale leżącej w płaszczyźnie ruchu. W przypadku spełnienia założenia iż $x' = \rho > 0$ współrzędna ta jest jedną ze współrzędnych w nieruchomym cylindrycznym układzie współrzędnych, ale w zadaniu dopuszczamy iż może ona także przyjmować wartości ujemne.

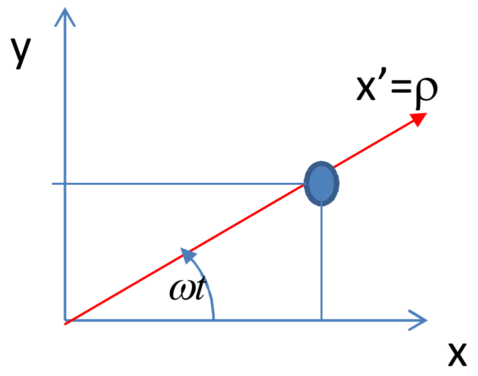
Związek wielkości x i y ze zmienną ρ

$$x = \rho \cos(\omega t) \qquad y = \rho \sin(\omega t)$$

Równanie więzów nie wprowadza ograniczenia na zmienną ρ

$$f_1(x, y, t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = \rho\sin(\omega t)\cos(\omega t) - \rho\cos(\omega t)\sin(\omega t) \equiv 0$$

Z relacji pomiędzy x,y,ρ wynika iż



$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial x}{\partial t} = \cos(\omega t)\dot{\rho} - \rho\omega\sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial y}{\partial t} = \sin(\omega t)\dot{\rho} + \rho\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\rho}}\ddot{\rho} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = -\omega\sin(\omega t)\dot{\rho} + \cos(\omega t)\ddot{\rho} - \omega\sin(\omega t)\dot{\rho} - \rho\omega^2\cos(\omega t) =$$
$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\cos(\omega t) - 2\dot{\rho}\omega\sin(\omega t)$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\rho}}\ddot{\rho} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} = \omega\cos(\omega t)\dot{\rho} + \sin(\omega t)\ddot{\rho} + \omega\cos(\omega t)\dot{\rho} - \rho\omega^2\sin(\omega t) =$$
$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\sin(\omega t) + 2\dot{\rho}\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^{2}\right)\cos(\omega t) - 2\dot{\rho}\omega\sin(\omega t) \qquad \ddot{y} = \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^{2}\right)\sin(\omega t) + 2\dot{\rho}\omega\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x}\cos(\omega t) + m\ddot{y}\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\omega^{2}\right)\cos^{2}(\omega t) - 2m\dot{\rho}\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + m\left(\ddot{\rho} - \rho\omega^{2}\right)\sin^{2}(\omega t) + 2m\dot{\rho}\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow$$

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\omega^{2}\right)\left[\cos^{2}(\omega t) + \sin^{2}(\omega t)\right] = 0 \Rightarrow \quad \ddot{\rho} - \omega^{2}\rho = 0$$

Rozwiązania ogólnego równania różniczkowego poszukujemy w postaci

$$\rho = C\exp(\lambda t) \quad \Rightarrow C\exp(\lambda t)\left[\lambda^{2} - \omega^{2}\right] = 0$$

Równanie charakterystyczne i jego pierwiastki

$$\lambda^{2} - \omega^{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_{1} = \omega, \lambda = \lambda_{2} = -\omega$$

Ogólne rozwiązanie

$$\rho = C_{1}\exp(\lambda_{1}t) + C_{2}\exp(\lambda_{2}t) = C_{1}\exp(\omega t) + C_{2}\exp(-\omega t)$$

$$\rho = C_1 \exp(\omega t) + C_2 \exp(-\omega t) \qquad \dot{\rho} = \omega\left[C_1 \exp(\omega t) - C_2 \exp(-\omega t)\right]$$

Wyznaczenie stałych dowolnych z warunków początkowych ruchu

$$x(t=0) = x_0$$

$$x(t) = \rho\cos(\omega t) \Rightarrow x(t=0) = \rho(t=0) = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\rho}\cos(\omega t) - \rho\omega\sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t=0) = \dot{\rho}(t=0) = \omega(C_1 - C_2) \Rightarrow C_1 - C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= x_0 \\ C_1 - C_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}x_0$$

A zatem

$$\rho = \frac{1}{2}x_0\left[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)\right] = x_0\cosh(\omega t)$$

$$x = \rho\cos(\omega t) = x_0\cosh(\omega t)\cos(\omega t) \qquad y = \rho\sin(\omega t) = x_0\cosh(\omega t)\sin(\omega t)$$

b) Określenie związków między składowymi siły reakcji

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, grad f_k$$

gdzie λ_k oznaczają nieoznaczone mnożniki Lagrange'a.

$$\vec{F}_R = \left[F_{Rx}, F_{Ry}, F_{RZ}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}\right]$$

$$p = 1, f_1(x, y, t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$$

$$\vec{F}_R = \left[-\sin(\omega t)\lambda_1, \cos(\omega t)\lambda_1, 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{Rx} = -\sin(\omega t)\lambda_1, F_{Ry} = \cos(\omega t)\lambda_1, F_{Rz} = 0$$

$$F_{Ry}\sin(\omega t) = -F_{Rx}\cos(\omega t)$$

Dodatek (punkt c do samodzielnego rozwiązania rozszerzony)

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, grad f_k \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} = F_y + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \qquad m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}$$

$$p = 1, f_1(x, y, t) = y\cos(\omega t) - x\sin(\omega t) = 0$$ Siła wypadkowa $\vec{F} = [0,0,-mg]$.

Czyli

$$m\ddot{x} = -\sin(\omega t)\lambda_1 \qquad (*)$$

$$m\ddot{y} = \cos(\omega t)\lambda_1 \qquad (**)$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

Po wyznaczeniu mnożnika λ_1 z równania (*) $\lambda_1 = -\dfrac{m\ddot{x}}{\sin(\omega t)}$

i wstawieniu wyniku do (**) otrzymujemy równanie $m\ddot{x}\cos(\omega t) + m\ddot{y}\sin(\omega t) = 0$

Wyznaczenie siły reakcji

$$\rho = x_0 \cosh(\omega t) \Rightarrow \dot{\rho} = x_0 \omega \sinh(\omega t) \Rightarrow \ddot{\rho} = x_0 \omega^2 \cosh(\omega t)$$

$$\ddot{x} = \left(\ddot{\rho} - \rho\omega^2\right)\cos(\omega t) - 2\dot{\rho}\omega \sin(\omega t) = -2x_0\omega^2 \sinh(\omega t)\sin(\omega t)$$

Z równania (*)

$$\lambda_1 = -\frac{m\ddot{x}}{\sin(\omega t)} = 2m x_0 \omega^2 \sinh(\omega t)$$

Siła reakcji

$$F_{Rx} = -\sin(\omega t)\lambda_1 = -2m x_0 \omega^2 \sinh(\omega t)\sin(\omega t)$$

$$F_{Ry} = \cos(\omega t)\lambda_1 = 2m x_0 \omega^2 \sinh(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$F_{Rz} = 0$$