Zadanie 2 (seria I).

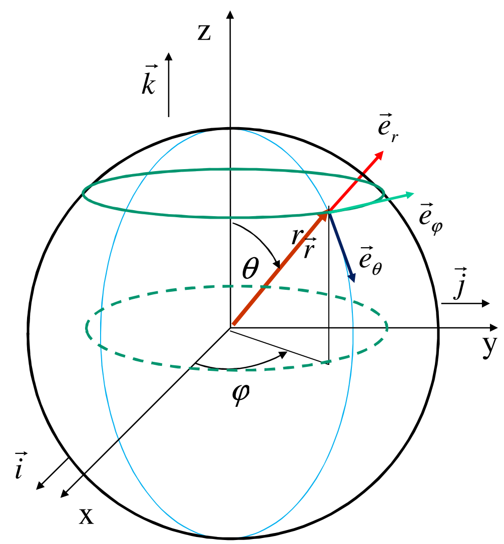
W układzie sferycznym do określenia położenia ciała służą współrzędne r, θ, φ których związek ze współrzędnymi kartezjańskimi dany jest wzorami

$x = r\cos(\varphi)\sin\theta \qquad y = r\sin(\varphi)\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$

1) Znaleźć związek pomiędzy wersorami $\vec{e}_1 = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi$ sferycznego układu współrzędnych oraz wersorami układu kartezjańskiego $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

2) Dla punktu materialnego o masie m znaleźć rozkład na składowe we współrzędnych sferycznych wektorów wodzącego $\vec{r}$, prędkości $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, przyspieszenia $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.

3) Znaleźć odpowiednie wzory dla układu biegunowego wprowadzonego w płaszczyźnie z=0 kładąc $\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$.



$$\vec{L} = m\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix}$$ gdzie r_r, r_θ, r_φ -składowe wektora wodzącego w układzie sferycznym,

v_r, v_θ, v_φ - składowe wektora prędkości w układzie sferycznym.

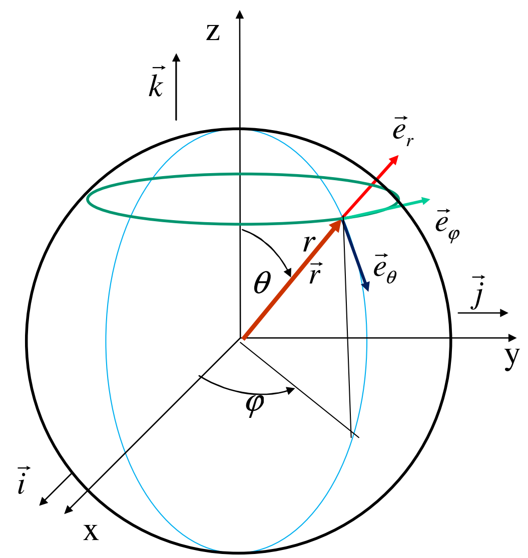
Krzywoliniowe układy współrzędnych

Położenie punktu materialnego w przestrzeni możemy opisywać nie tylko w układzie kartezjańskim lecz także w układach krzywoliniowych (np. cylindrycznym, sferycznym). W przestrzeni 3 DIM do określenia położenia punktu w przestrzeni wykorzystujemy 3 współrzędne q_i (i=1,2,3) przy czym współrzędne kartezjańskie sa funkcjami tych współrzędnych $x = x(q_1, q_2, q_3)$ $y = y(q_1, q_2, q_3)$ $z = z(q_1, q_2, q_3)$

W układzie sferycznym $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$

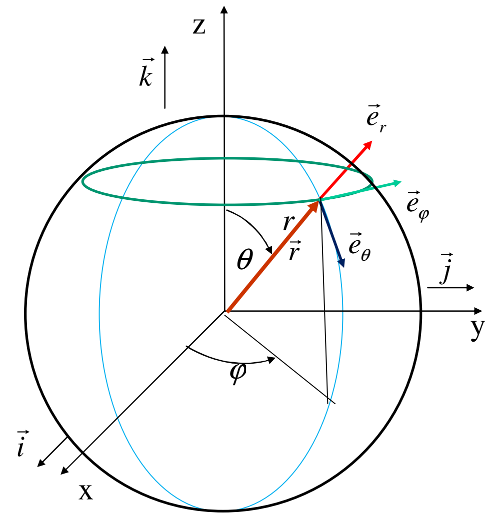
Układ sferyczny

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$



Układ sferyczny

Współrzędne krzywoliniowe $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$



Związek między współrzędnymi w układzie sferycznym i kartezjańskim

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

Określenie współczynników Lamé:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$L_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta)} =$$

$$= \sqrt{\sin^2(\theta)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) + \cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1$$

$$L_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)} =$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2(\theta)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) + r^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)} = r$$

$$L_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} =$$

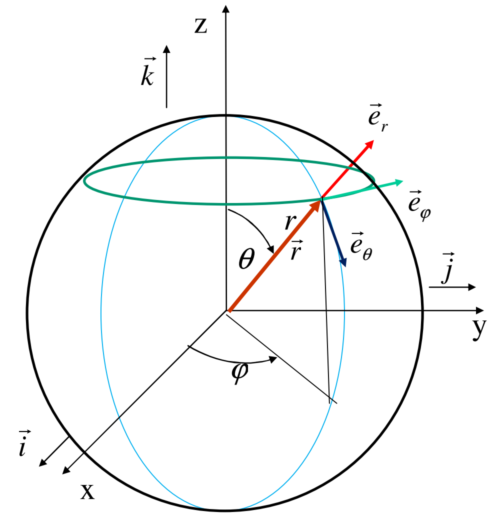
$$= \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + 0} =$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)} = r\sin(\theta)$$

Układ sferyczny

Związek wersorów w układzie sferycznym $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ oraz kartezjańskim $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$L_r = 1 \qquad L_\theta = r \qquad L_\varphi = r\sin(\theta)$$



$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

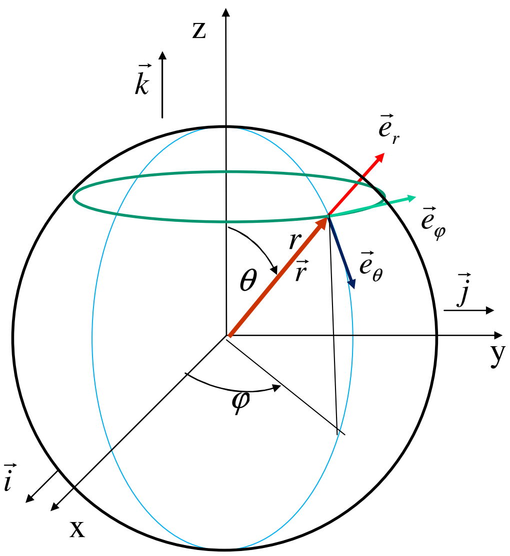
$$\vec{e}_i = \frac{1}{L_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right)$$

$$\vec{e}_r = \frac{1}{L_r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}\right) = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{L_\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{k}\right) = \frac{1}{r}\left[r\cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - r\sin(\theta)\vec{k}\right] = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{L_\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\vec{k}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[-r\sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{i} + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{j}\right] = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

Układ sferyczny



Określenie składowych wektora wodzącego

$$\vec{r} = r_r\vec{e}_r + r_\theta\vec{e}_\theta + r_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$r_i = \frac{1}{2L_i}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial q_i}$$

Ponieważ

$$L_r = 1 \qquad L_\theta = r \qquad L_\varphi = r\sin(\theta)$$

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad z = r\cos(\theta)$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta) = r^2$$

to

$$r_r = \frac{1}{2L_r}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{1}{2}2r = r \qquad r_\theta = \frac{1}{2L_\theta}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial\theta} = \frac{1}{2r}\frac{\partial r^2}{\partial\theta} = 0$$

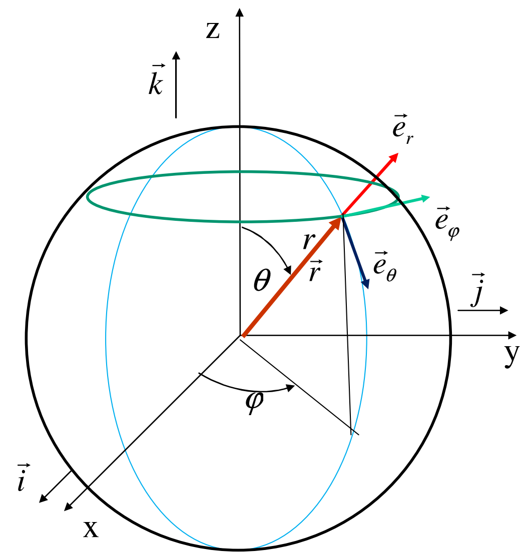
$$r_\varphi = \frac{1}{2L_\varphi}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial\varphi} = \frac{1}{2r\sin(\theta)}\frac{\partial r^2}{\partial\varphi} = 0$$

Wektor wodzący

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Układ sferyczny

$$\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i = r_r \vec{e}_r + r_\theta \vec{e}_\theta + r_\varphi \vec{e}_\varphi \qquad r_r = r \qquad r_\theta = r_\varphi = 0$$



Określenie składowych wektora prędkości

$$\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$v_i = L_i \dot{q}_i$$

$$L_r = 1 \qquad L_\theta = r \qquad L_\varphi = r\sin(\theta)$$

$$v_r = L_r \dot{r} = \dot{r} \qquad v_\theta = L_\theta \dot{\theta} = r\dot{\theta} \qquad v_\varphi = L_\varphi \dot{\varphi} = r\sin(\theta)\dot{\varphi}$$

Wektor prędkości

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Widać iż $v_\theta \neq \dot{r}_\theta, v_\varphi \neq \dot{r}_\varphi$ Zwykle $v_i \neq \dot{r}_i$

Wynika to z faktu zależności wersorów $\vec{e}_i$ w układzie krzywoliniowym od czasu w trakcie ruchu ciała przez co $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \neq \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i$

Układ sferyczny

Określenie składowych wektora przyspieszenia

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v_\varphi = r\sin(\theta)\dot{\varphi}$$

$$L_r = 1 \qquad L_\theta = r \qquad L_\varphi = r\sin(\theta)$$

$$a_i = \frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i}\right]$$

$$f = \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}\left[v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right] = \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]$$

$$a_r = \frac{1}{L_r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial f}{\partial r}\right] = \frac{d}{dt}(\dot{r}) - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$a_\theta = \frac{1}{L_\theta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial f}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = \frac{1}{r}\left[2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] =$$

$$= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2$$

gdyż $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dot{\theta}\right)\dot{r} + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(r^2\dot{\theta}\right)\ddot{\theta} = 2r\dot{\theta}\dot{r} + r^2\ddot{\theta}$

$$a_\varphi = \frac{1}{L_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\left[r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right]\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\left[2r\dot{r}\sin^2\theta\dot{\varphi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\varphi}\right] =$$

$$= 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}$$

Wektor przyspieszenia

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Widać iż $a_i \neq \dot{v}_i$ bo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \neq \sum_i \dot{v}_i \vec{e}_i$ gdyż $\frac{d\vec{e}_i}{dt} \neq 0$

Moment pędu ciała o masie *m* w układzie kartezjańskim i sferycznym

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = m\left[(y\dot{z} - \dot{y}z)\vec{i} + (z\dot{x} - x\dot{z})\vec{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}\right]$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin\theta\dot{\varphi} \end{vmatrix} = m\left[0\vec{e}_r - r^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\boxed{\vec{L} = -mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi}$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \qquad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} \qquad \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j} \qquad \vec{r} = r\vec{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = -mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi$$

Układ biegunowy

W przypadku ruchu w płaszczyźnie z=0 dwuwymiarowy układ wprowadzony w tej płaszczyźnie to układ biegunowy. Współrzędnymi w tym układzie są wielkości r oraz φ układu sferycznego. Natomiast mamy $\theta = \frac{\pi}{2}$ oraz $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

A zatem

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

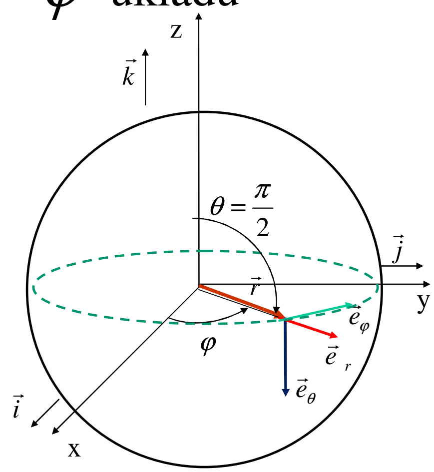
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Wektor jednostkowy $\vec{e}_\theta$ jest prostopadły do płaszczyzny ruchu i skierowany w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Oz

$$\vec{e}_\theta = -\vec{k}$$



W kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu jest skierowany również moment pędu równy

$$\vec{L} = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

W układzie kartezjańskim moment pędu ma tylko składową z-ową równą $L_z = mr^2\dot{\varphi}$