Zadanie 1a (seria II). Punkt materialny o masie m porusza się w przestrzeni trójwymiarowej po powierzchni o równaniu $z = bx^2$ (b-znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0,0,-mg)$ (składowe siły ciężkości są równe $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$).

1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego
Rzeczpospolita Polska
Dofinansowane przez Unię Europejską
Politechnika Warszawska

,

Równanie więzów: $f(x,z) = z - bx^2 = 0$

Siła reakcji jest prostopadła do powierzchni po której porusza się ciało i można ją zapisać w układzie kartezjańskim wzorem

$$\vec{F}_R = \lambda grad f = \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-2\lambda bx, 0, \lambda)$$

gdzie λ -nieoznaczony mnożnik Lagrange'a

Zapis równań Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -2\lambda bx$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_R \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda grad f \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \quad m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda$$

$\vec{F}_R = (-2\lambda bx, 0, \lambda)$

Wyrażenie składowych siły reakcji jako funkcji $x, \dot{x}$

Musimy uzależnić nieoznaczony mnożnik Lagrange'a λ tylko od powyższych wielkości.

Różniczkujemy dwukrotnie równanie więzów $f(x,z) = z - bx^2 = 0$ po czasie

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0 \Rightarrow \quad \dot{f} = -2bx\dot{x} + \dot{z} = 0$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{z}}\ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{f} = -2b\dot{x}^2 - 2bx\ddot{x} + \ddot{z} = 0 \qquad (*)$$

Uzależniamy $\ddot{x}, \ddot{z}$ stojące w powyższym równaniu od x i λ korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju i wstawiamy otrzymane wyrażenia do równania (*)

$$m\ddot{x} = -2\lambda bx \quad \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-2\lambda bx}{m}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda \quad \Rightarrow \ddot{z} = -g + \frac{\lambda}{m}$$

$$\ddot{f} = -2b\dot{x}^2 + \frac{4\lambda b^2 x^2}{m} - g + \frac{\lambda}{m} = 0$$

$$-2b\dot{x}^2+\frac{4\lambda b^2x^2}{m}-g+\frac{\lambda}{m}=0\Rightarrow\quad \frac{\lambda}{m}\left(4b^2x^2+1\right)=2b\dot{x}^2+g\Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{2mb\dot{x}^2+mg}{4b^2x^2+1}$$

$$\vec{F}_R=\left(-2\lambda bx,0,\lambda\right)\Rightarrow$$

$$F_{Rx}=-2\lambda bx=\frac{-4mb^2x\dot{x}^2-2mbxg}{4b^2x^2+1},F_{Ry}=0,F_{Rz}=\lambda=\frac{2mb\dot{x}^2+mg}{4b^2x^2+1}$$

Uzależniliśmy składowe siły reakcji działającej na ciało od wielkości $x,\dot{x}$

W szczególności składowe te w chwili czasu $t=t_0$ gdy $x(t=0)=x_0,\dot{x}\left(t=0\right)=\dot{x}_0$

są równe

$$F_{Rx}=\frac{-4mb^2x_0\dot{x}_0^2-2mbx_0g}{4b^2x_0^2+1},\qquad F_{Ry}=0,\qquad F_{Rz}=\lambda=\frac{2mb\dot{x}_0^2+mg}{4b^2x_0^2+1}$$