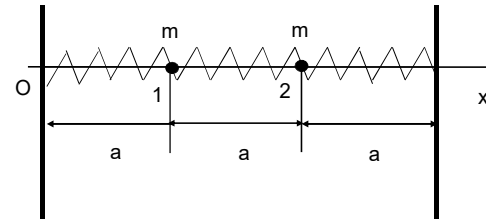




OMNIS2

Zadanie 1 (seria IV). Dwa punkty materialne o tej samej masie równej m mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy k , zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a .



Przyjmujemy za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).

- 1) Znaleźć energię potencjalną układu jako funkcję współrzędnych uogólnionych q_1, q_2 . Pokazać iż energia ta przyjmuje wartość minimalną gdy $q_1 = q_2 = 0$ oraz to iż można ją przedstawić wzorem:

$$V = \frac{1}{2}(K_{11}q_1^2 + K_{22}q_2^2 + K_{12}q_1q_2 + K_{21}q_2q_1) + const$$

gdzie $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ - stałe, $K_{12} = K_{21}$.

Znaleźć wartości stałych $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, const$ (niektóre z nich mogą być równe zero).

- 2) Pokazać iż energię kinetyczną układu można przedstawić wzorem

$$T = \frac{1}{2}(M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{22}\dot{q}_2^2 + M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1) \text{ gdzie } M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21} \text{ - stałe, } M_{12} = M_{21}.$$

Znaleźć wartości stałych $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ (niektóre z nich mogą być równe zero).

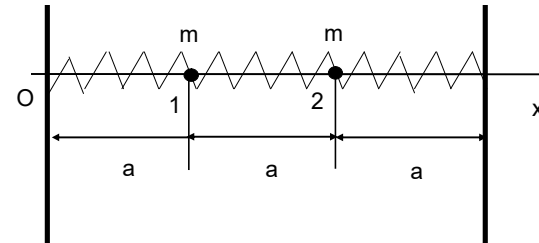
- 3) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.
- 4) Znaleźć współrzędne normalne u_1 oraz u_2 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych u_1 oraz u_2 oraz ich pochodnych po czasie.



Dwa stopnie swobody \Rightarrow 2 współrzędne uogólnione q_1, q_2

Wybór współrzędnych uogólnionych musi być tak przeprowadzony iż w położeniu równowagi $q_1=q_2=0$

$$q_1 = x_1 - a, \quad q_2 = x_2 - 2a$$



1) Energia potencjalna (potencjał)

Energia potencjalna jest sumą energii trzech rozciągniętych o Δl_i ($i=1,2,3$) (lub ściśniętych gdy $\Delta l_i < 0$) sprężyn:

$$V = \frac{k}{2} [(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2 + (\Delta l_3)^2] = \frac{k}{2} [(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2 + (2a - x_2)^2]$$

Można pokazać iż siły działające na 1 i 2 ciało są równe

$$F_{1x} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x_1 - a) + k(x_2 - x_1 - a) = -k\Delta l_1 + k\Delta l_2$$

$$F_{2x} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(2a - x_2) - k(x_2 - x_1 - a) = k\Delta l_3 - k\Delta l_2$$

Inny sposób $V = -\int F_{1x} dx_1 + C(x_2) = 2k \int x_1 dx_1 - k \int x_2 dx_1 + C(x_2) = kx_1^2 - kx_1 x_2 + C(x_2)$

$$F_{2x} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \Rightarrow k(2a - x_2) - k(x_2 - x_1 - a) = kx_1 - \frac{dC(x_2)}{dx_2} \Leftrightarrow -2kx_2 + kx_1 + 3ka = kx_1 - \frac{dC(x_2)}{dx_2}$$

$$C(x_2) = \int (-3ka + 2kx_2) dx_2 + const = -3kax_2 + kx_2^2 + const$$

Wzór końcowy na V zgodny z (*) gdy $const=3ka^2$

Uzależnienie V od współrzędnych uogólnionych q_1, q_2

$$\begin{aligned} q_1 = x_1 - a \Rightarrow x_1 = q_1 + a \\ q_2 = x_2 - 2a \Rightarrow x_2 = q_2 + 2a \end{aligned} \Rightarrow V = \frac{k}{2} [(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2 + (2a - x_2)^2] = \\ = \frac{k}{2} [(q_1)^2 + (q_2 - q_1)^2 + (-q_2)^2] = \frac{1}{2} [2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2]$$

Energia ta przyjmuje wartość minimalną równą zero gdy $q_1 = q_2 = 0$, które to położenie odpowiada trwałemu (stabilnemu) położeniu równowagi.

W ogólnym przypadku małych drgań

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^f K_{jl} q_j q_l + const \quad \text{gdzie } K_{jl} = K_{lj}; K_{jl} \text{ - stałe.}$$

W rozważanym zadaniu liczba stopni swobody $f=2$ i

$$V = \frac{1}{2} (K_{11}q_1^2 + K_{22}q_2^2 + K_{12}q_1q_2 + K_{21}q_2q_1) + const$$

$$\text{gdzie } K_{12} = K_{21}$$

· Z przeprowadzonych obliczeń wynika iż

$$V = \frac{1}{2} [2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2]$$

$$2q_1q_2 = q_1q_2 + q_2q_1 \Rightarrow V = \frac{1}{2} [2kq_1^2 - kq_1q_2 - kq_2q_1 + 2kq_2^2] \quad (4)$$

$$\text{Wzór (3) zgodny z (4) gdy } K_{11} = K_{22} = 2k \quad K_{12} = K_{21} = -k \quad const = 0$$

Ze współczynników typu K_{jl} możemy też utworzyć macierz kwadratową będącą macierzą hermitowską

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

2) Energia kinetyczna $T = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2$

$$q_1 = x_1 - a, \quad q_2 = x_2 - 2a \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1, \quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2 \Rightarrow \quad T = \frac{m}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{q}_2^2 \quad (1)$$

W przypadku małych drgań $T = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^f M_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$ gdzie $M_{jl} = M_{lj}$, M_{jl} stałe

W rozważanym zadaniu liczba stopni swobody $f=2$ i

$$T = \frac{1}{2} (M_{11} \dot{q}_1^2 + M_{22} \dot{q}_2^2 + M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + M_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1) \quad (2)$$

Wzór (1) zgodny z (2) gdy przyjmiemy iż

$$M_{11} = M_{22} = m \quad M_{12} = M_{21} = 0$$

Ze współczynników typu M_{jl} możemy utworzyć macierz kwadratową będącą macierzą hermitowską

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

3) Wyznaczenie częstości kołowych drgań

Tworzymy macierz kwadratową

$$\hat{K} - \omega^2 \hat{M} = \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}.$$

Częstości drgań spełniają równanie

$$\det[\hat{K} - \omega^2 \hat{M}] = |\hat{K} - \omega^2 \hat{M}| = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Po policzeniu wyznacznika

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 &\Rightarrow && 2k - m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &&& \text{lub} \\ &&& 2k - m\omega^2 = -k \Rightarrow \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

Wyznaczenie zależności współrzędnych uogólnionych od czasu

Wprowadzamy macierze $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix}$ takie iż

zależność współrzędnych uogólnionych od czasu można zapisać wzorem

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{f=2} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Wyznamy te macierze z dokładnością do stałej korzystając z równań

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_i^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=1,2 \quad (5)$$

$$1) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_1^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wynikają stąd dwa równoważne sobie równania o postaci $kC_1^{(1)} - kC_2^{(1)} = 0 \Rightarrow C_2^{(1)} = C_1^{(1)}$

$$2) \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_2^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wynikają stąd dwa równoważne sobie równania o postaci $-kC_1^{(2)} - kC_2^{(2)} = 0 \Rightarrow C_2^{(2)} = -C_1^{(2)}$

Można sprawdzić że macierze wyznaczone $C^{(1)}, C^{(2)}$ spełniają równania $C^{(2)T} \hat{M} C^{(1)} = C^{(1)T} \hat{M} C^{(2)} = 0$

gdzie $C^{(i)T} = [C_1^{(i)} \quad C_2^{(i)}]$ (gdyż $\omega_2 \neq \omega_1$, w innym przypadku warunki te należałoby dodatkowo uwzględnić)

Ostatecznie

$$q_1 = C_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$q_2 = C_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \overset{C_2^{(1)} = C_1^{(1)}}{\cancel{C_1^{(1)}}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \overset{C_2^{(2)} = -C_1^{(2)}}{\cancel{C_1^{(2)}}} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Powyżej zapisane równania określające zależność współrzędnych q_1, q_2 od czasu zależą w ogólności od czterech stałych dowolnych $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2$, które można określić z warunków początkowych ruchu.

Ogólne rozwiązanie jest superpozycją drgań normalnych o znalezionych częstościach

W przypadku drgań o częstości $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oba ciała drgają w tej samej fazie, przy czym amplitudy drgań obu ciał są jednakowe (w tym modzie drgań sprężyna środkowa jest nienaprężona).

W przypadku drgań o częstości $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ oba ciała drgają w przeciwnych fazach, przy czym amplitudy drgań obu ciał są jednakowe.

4) Określenie współrzędnych normalnych

Szukamy macierzy $\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} \\ \chi_2^{(1)} \end{bmatrix}$ oraz $\chi^{(2)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix}$

spełniających równania

$$(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})\chi^{(i)} = 0 \quad i=1,2 \quad (6)$$

$$\chi^{(i)T}(\hat{M})\chi^{(j)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i=j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases} \quad i,j=1,2 \quad (7)$$

gdzie $(\chi^{(i)})^T = [\chi_1^{(i)} \quad \chi_2^{(i)}]$ oznacza macierz wierszową transponowaną do macierzy

kolumnowej $\chi^{(i)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix}$ ($i=1,2$)

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Równania (6) mają jednakową postać jak równania (5) $(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M})C^{(i)} = 0$

a zatem mają jednakowe rozwiązania

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(1)} = C_1^{(1)} \Rightarrow \chi_2^{(1)} = \chi_1^{(1)}$$

$$C_2^{(2)} = -C_1^{(2)} \Rightarrow \chi_2^{(2)} = -\chi_1^{(2)}$$

Równanie (7) gdy $j=i$ można zapisać w postaci

$$[\chi_1^{(i)} \quad \chi_2^{(i)}] \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow m[(\chi_1^{(i)})^2 + (\chi_2^{(i)})^2] = 1 \Rightarrow 2m(\chi_1^{(i)})^2 = 1 \Rightarrow \chi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad (i=1,2)$$

$$\chi_2^{(1)} = \chi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \chi_2^{(2)} = -\chi_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2m}}$$

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} \\ \chi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Macierze $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ powinny ponadto spełniać równania $(\chi^{(2)})^T (\hat{M}) \chi^{(1)} = 0$, $(\chi^{(1)})^T (\hat{M}) \chi^{(2)} = 0$ które w rozważanym przypadku gdy $\omega_2 \neq \omega_1$ (czyli nie występuje degeneracja) są spełnione automatycznie gdy spełnione jest równanie (6), co można łatwo sprawdzić np.

$$(\chi^{(2)})^T (\hat{M}) \chi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} [1, -1] \cdot m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [1, -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Współrzędne normalne u_1, u_2 można wprowadzić tak iż spełniają one poniższe równanie:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \hat{W}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Z powyższego równania macierzowego wynika iż

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (u_1 + u_2) \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (u_1 - u_2) \quad (8)$$

W celu uzyskania relacji odwrotnych do relacji powyższych można wykorzystać np. równanie

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = (\hat{W}^{-1})^T \cdot \hat{M} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_2^{(1)} \\ \chi_1^{(2)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 + q_2) \\ \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 - q_2) \end{bmatrix}$$

skąd wynikają relacje określające współrzędne normalne

$$u_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 + q_2) \quad u_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 - q_2)$$

Można je otrzymać też bezpośrednio z relacji (8)

Funkcja Lagrange'a we współrzędnych normalnych

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(u_1 + u_2) \Rightarrow \dot{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(u_1 - u_2) \Rightarrow \dot{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}[2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2] = \\ &= \frac{m}{2} \frac{1}{2m} [(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2] - \frac{1}{2} \frac{1}{2m} [2k(u_1 + u_2)^2 - 2k(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) + 2k(u_1 - u_2)^2] \\ &= \frac{1}{4} [2\dot{u}_1^2 + 2\dot{u}_2^2] - \frac{1}{4m} [2ku_1^2 + 6ku_2^2] = \frac{1}{2} [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] - \frac{1}{2} \frac{k}{m} u_1^2 - \frac{1}{2} \frac{3k}{m} u_2^2 \\ L &= \frac{1}{2} [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2] - \frac{1}{2} \omega_1^2 u_1^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 u_2^2 \end{aligned}$$

W funkcji Lagrange'a nie występują wyrazy zależne od iloczynów różnych współrzędnych lub prędkości normalnych.

Równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = 0$$

Opisują one dwa niezależne oscylatory o częstościach

kołowych drgań $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oraz $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = 0$$