



OMNIS2

Zadanie 1 (seria III)

Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych przecinająca oś pionową (Oz) pod stałym w czasie kątem α ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$) obraca się

dookoła tej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Po prostej porusza się bez tarcia ciało (punkt materialny) o masie m . Na ciało działa siła harmoniczna $\vec{F}_h = -k\vec{r} = (-kx, -ky, -kz)$ gdzie k - dodatnia stała

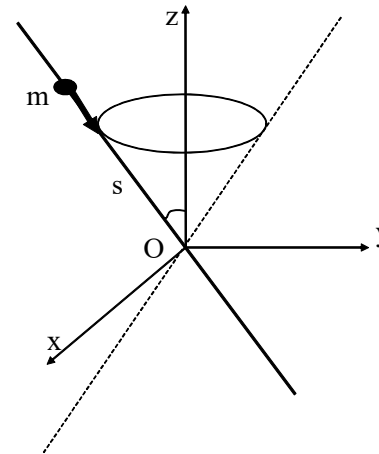
1) Wyznaczyć ruch tego ciała przy pomocy równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Założyć iż

$\frac{k}{m} > \omega^2 \sin^2(\alpha)$. Zaniedbać wpływ siły ciężkości na

ruch ciała. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało w układzie odniesienia związanym z obracającą się prostą, zaś jego odległość od początku układu współrzędnych wynosiła s_0 , przy czym:

$$x(t=0) = s_0 \sin(\alpha), \quad y(t=0) = 0.$$

2) Znaleźć uogólnioną energię. Czy jest ona stałą ruchu?

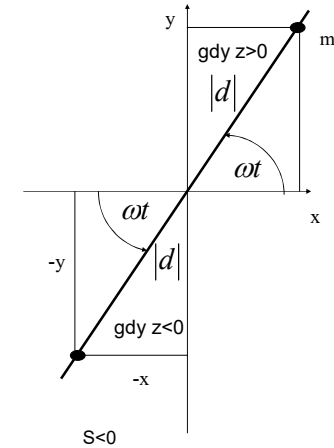
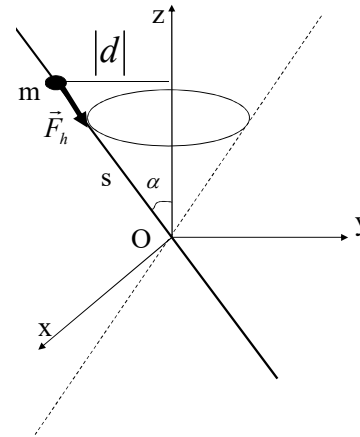


Poszukiwanie równania więzów

Z warunków zadania (w szczególności także tego iż $x(t=0) > 0, y(t=0) = 0$)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\omega t) = \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)} \Rightarrow f_1 = \cos(\omega t)y - \sin(\omega t)x = 0$$

$$\frac{|d|}{|z|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|} = \operatorname{tg}(\alpha) \Rightarrow f_2 = |z|\operatorname{tg}(\alpha) - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$



Wybór współrzędnej uogólnionej

1 stopień swobody $f=1 \rightarrow$ 1 współrzędna uogólniona $q_1=s$

Może być nią wielkość s której moduł równy jest odległości punktu materialnego od początku układu współrzędnych.

Związek współrzędnej s ze współrzędnymi w układzie kartezjańskim

zawsze $z = s \cos(\alpha)$

gdy $z, s > 0 \Rightarrow |d| = s \sin(\alpha) \quad x = |d| \cos(\omega t) = s \sin(\alpha) \cos(\omega t) \quad y = |d| \sin(\omega t) = s \sin(\alpha) \sin(\omega t)$

gdy $z, s < 0 \Rightarrow |d| = -s \sin(\alpha) \quad x = -|d| \cos(\omega t) = s \sin(\alpha) \cos(\omega t) \quad y = -|d| \sin(\omega t) = s \sin(\alpha) \sin(\omega t)$

Równania więzów są spełnione dla dowolnych wartości przyjmowanych przez współrzędną s gdyż

$$f_1 = \cos(\omega t)y - \sin(\omega t)x = \cos(\omega t)s \sin(\alpha) \sin(\omega t) - \sin(\omega t)s \sin(\alpha) \cos(\omega t) \equiv 0$$

$$f_2 = |z|\operatorname{tg}(\alpha) - \sqrt{x^2 + y^2} = |s| \cos(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha) - \sqrt{s^2 \sin^2(\alpha) (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = |s| \sin(\alpha) - |s| \sin(\alpha) \equiv 0$$

Wyznaczenie energii kinetycznej T

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Ponieważ

$$x = s \sin(\alpha) \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} \dot{s} = -s \omega \sin(\alpha) \sin(\omega t) + \sin(\alpha) \cos(\omega t) \dot{s}$$

$$y = s \sin(\alpha) \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s} \dot{s} = s \omega \sin(\alpha) \cos(\omega t) + \sin(\alpha) \sin(\omega t) \dot{s}$$

$$z = s \cos(\alpha) \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial s} \dot{s} = \cos(\alpha) \dot{s}$$

to

$$T = \frac{m}{2} (s^2 \omega^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\omega t) + \dot{s}^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\omega t) - 2s\dot{s}\omega \sin^2(\alpha) \sin(\omega t) \cos(\omega t) + s^2 \omega^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\omega t) + \dot{s}^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\omega t) + 2s\dot{s}\omega \sin^2(\alpha) \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \dot{s}^2 \cos^2(\alpha)) =$$

$$T = \frac{m}{2} [s^2 \omega^2 \sin^2(\alpha) (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + \dot{s}^2 \sin^2(\alpha) (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) + \dot{s}^2 \cos^2(\alpha)] =$$

$$= \frac{m}{2} (s^2 \omega^2 \sin^2(\alpha) + \dot{s}^2 \sin^2(\alpha) + \dot{s}^2 \cos^2(\alpha)) = \frac{m}{2} (s^2 \omega^2 \sin^2(\alpha) + \dot{s}^2)$$

T zależy tylko od s, \dot{s} (mogłaby jeszcze zależeć od t ale nie zależy)

Wyznaczenie potencjału $\vec{F} = -gradV \Leftrightarrow F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$F_x = -kx, F_y = -ky, F_z = -kz \Rightarrow V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + const = \frac{k}{2}s^2 + const = \frac{k}{2}s^2$$

Można przyjąć
const=0

Inny sposób : siła uogólniona $Q_s = F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_z \frac{\partial z}{\partial s} = -kx \sin(\alpha) \cos(\omega t) - ky \sin(\alpha) \sin(\omega t) - kz \cos(\alpha) =$
 $= -k s \sin^2(\alpha) \cos^2(\omega t) - k s \sin^2(\alpha) \sin^2(\omega t) - k s \cos^2(\alpha) = -ks$

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \Rightarrow -ks = -\frac{\partial V}{\partial s} \Rightarrow V = \frac{1}{2}ks^2$$

V zależy tylko od s (mogłaby jeszcze zależeć od t ale nie zależy)

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a i zapis równań Lagrange'a II rodzaju

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \omega^2 \sin^2(\alpha)s^2) - \frac{k}{2}s^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad l=1, \dots, f \quad f=1, q_1 = s \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{s} \quad \frac{\partial L}{\partial s} = m\omega^2 \sin^2(\alpha)s - ks$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \Rightarrow m\ddot{s} - m\omega^2 \sin^2(\alpha)s + ks = 0 \Rightarrow \ddot{s} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2(\alpha) \right) s = 0$$

Zgodnie z treścią zadania $\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2(\alpha) > 0 \Rightarrow$

Wprowadzamy oznaczenie $\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2(\alpha) > 0 \Rightarrow \ddot{s} + \Omega^2 s = 0$

Wyznaczenie ruchu ciała

$$\ddot{s} + \Omega^2 s = 0 \Rightarrow$$

$$s = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

$$\dot{s} = \Omega[-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)]$$

Wyznaczenie stałych A i B z warunków początkowych ruchu

$$x = s \sin(\alpha) \cos(\omega t) \Rightarrow x(t=0) = s(t=0) \sin(\alpha)$$

$$x(t=0) = s_0 \sin(\alpha) \longrightarrow s(t=0) = s_0$$

$$s(t=0) = s_0 \Rightarrow A = s_0$$

$$s(t=0) = A$$

W chwili $t=0$ ciało spoczywa w układzie związanym z obracającą się prostą $\Rightarrow \dot{s}(t=0) = 0$

$$\dot{s}(t=0) = 0$$

$$\dot{s}(t=0) = B\Omega \Rightarrow B = 0$$

A zatem $s(t) = s_0 \cos(\Omega t)$

gdzie $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2(\alpha)}$

W układzie nieinercyjnym związanym z prostą zachodzą drgania harmoniczne wokół początku układu współrzędnych z częstością obniżoną na skutek wpływu rzutu siły odśrodkowej na kierunek wyznaczony przez prostą na ruch ciała

$$x(t) = s_0 \cos(\Omega t) \sin(\alpha) \cos(\omega t) \quad y(t) = s_0 \cos(\Omega t) \sin(\alpha) \sin(\omega t) \quad z(t) = s_0 \cos(\Omega t) \cos(\alpha)$$

Wyznaczenie uogólnionej energii G i sprawdzenie czy jest stałą ruchu

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \omega^2 \sin^2(\alpha)s^2) - \frac{k}{2}s^2 \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \omega^2 \sin^2(\alpha)s^2) \quad V = \frac{k}{2}s^2$$

$$\text{Pęd uogólniony} \quad p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}$$

Uogólniona energia

$$G = \dot{s}p_s - L = m\dot{s}^2 - \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \omega^2 \sin^2(\alpha)s^2) + \frac{k}{2}s^2 = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 - \omega^2 \sin^2(\alpha)s^2) + \frac{k}{2}s^2 \neq T + V$$

Uogólniona energia **nie jest** równa sumie energii kinetycznej i potencjału w układzie inercyjnym, choć ma wymiar energii. Wynika to z tego iż relacje wiążące współrzędne kartezjańskie x, y ze współrzędną uogólnioną s są zależne jawnie od czasu .

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow G = \text{const}$$

Ponieważ funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu to uogólniona energia G jest stałą ruchu.