



OMNIS2

Zad. 1 (seria V)

Punkt materialny o masie m porusza się w polu siły ciężkości po powierzchni bocznej stożka, zwróconego wierzchołkiem w dół. Wiadomo, iż kąt między osią symetrii stożka Oz a tworzącą stożka wynosi α .

Stożek znajduje się w polu siły ciężkości działającej pionowo w dół. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Znaleźć funkcję Hamiltona i napisać równania kanoniczne Hamiltona. Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu? Czy można znaleźć współrzędną uogólnioną dla której pęd uogólniony związany z tą współrzędną jest stałą ruchu?

Wybór współrzędnych uogólnionych

2 stopnie swobody $f=2$, 2 współrzędne uogólnione.

Współrzędnymi tymi mogą być np. dwie z trzech współrzędnych w układzie sferycznym

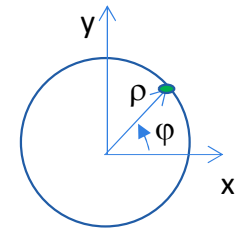
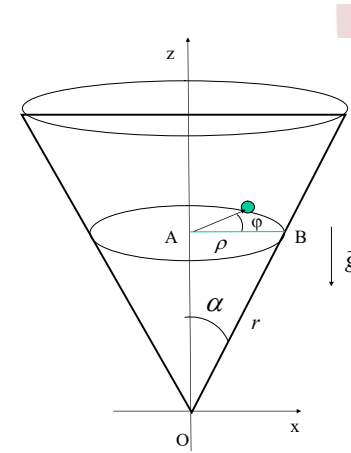
a) współrzędna r określająca odległość ciała od wierzchołka stożka

b) kąt azymutalny φ

Kąt biegunowy θ nie jest współrzędną uogólnioną i ma stałą wartość równą $\theta = \alpha$.

Związek współrzędnych uogólnionych ze współrzędnymi kartezjańskimi

$$x = \rho \cos(\varphi) = r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) = r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \quad z = r \cos(\alpha)$$



Równanie więzów ma postać: $f = \sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg}(\alpha) = 0$

Nie zależy ono jawnie od czasu. Nie wprowadza ograniczenia na wartości przyjmowane przez współrzędne uogólnione φ oraz r

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} - z \operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} - r \cos(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha) = r \sin(\alpha) - r \sin(\alpha) \equiv 0$$

Energia kinetyczna:

I sposób $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$x = r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\alpha) \cos(\varphi) \dot{r} - r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$y = r \sin(\alpha) \sin(\varphi) \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \sin(\alpha) \sin(\varphi) \dot{r} + r \sin(\alpha) \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$z = r \cos(\alpha) \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial r} \dot{r} = \cos(\alpha) \dot{r} \Rightarrow T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2)$$

II sposób $T = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2)$

gdzie składowe prędkości w ortogonalnym układzie sferycznym

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad v_\varphi = r \sin(\theta) \dot{\varphi}$$

$$\theta = \alpha = \text{const} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow v_r = \dot{r} \quad v_\theta = 0 \quad v_\varphi = r \sin(\alpha) \dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2)$$

Potencjał (energia potencjalna)

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -mg = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right\} \Rightarrow V = V(z) = m g z$$

Potencjał zależy od współrzędnej z , którą **nie** przyjęliśmy jako współrzędną uogólnioną, w związku czym trzeba ją uzależnić od współrzędnych uogólnionych

$$z = r \cos(\alpha) \Rightarrow V = m g z = m g r \cos(\alpha)$$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\phi}^2) - m g r \cos(\alpha)$

Pędy uogólnione: $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \quad (l=1, \dots, f=2)$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\phi}$$

Uogólniona energia: $G = \sum_{l=1}^{f=2} \dot{q}_l p_l(q, \dot{q}) - L$

$$G = \dot{r} p_r + \dot{\phi} p_\phi - L = m \dot{r}^2 + m r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\phi}^2 - \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\phi}^2) + m g r \cos(\alpha) =$$

$$G = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\phi}^2) + m g r \cos(\alpha)$$

$G = T + V$ gdyż relacje pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zależą jawnie od czasu i V nie zależy od prędkości (zwykły potencjał a nie uogólniony)

Funkcja Hamiltona $H(q, p, t) = G(q, \dot{q}(q, p, t), t)$

$$p_r = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$G = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi}^2) + mgr \cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$H(r, p_r, p_\varphi) = G(r, \dot{r}(p_r), \dot{\varphi}(r, p_\varphi)) = \frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2(\alpha) \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4(\alpha)} \right) + mgr \cos(\alpha)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr \cos(\alpha)$$

Czy funkcja Hamiltona jest stałą ruchu ?

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

$$H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr \cos(\alpha)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad (l=1, \dots, f) \quad f=2$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2(\alpha)} - mg \cos(\alpha)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\alpha)} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi} = \text{const}$$

Pęd p_φ jest stałą ruchu i jest on równy z -owej składowej momentu pędu bo

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2(\alpha) \dot{\varphi} = m\rho^2 \dot{\varphi} = L_z$$

Dodatkowy wniosek

Funkcje Hamiltona można więc zapisać wzorem

$$H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr \cos(\alpha) = \frac{p_r^2}{2m} + V_{ef}(r)$$

gdzie potencjał efektywny
$$V_{ef}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2 \sin^2(\alpha)} + mgr \cos(\alpha)$$

Ponieważ $\frac{p_r^2}{2m} \geq 0$, zaś $H = E$ to w trakcie ruchu musi zachodzić relacja $E \geq V_{ef}(r)$

Gdy $L_z \neq 0$ to $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$, ponadto $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \infty$

a zatem w trakcie ruchu gdy $L_z \neq 0$ i energia pozostaje skończona to $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$

Wynika stąd iż ciało nie może osiągnąć wierzchołka stożka.

Wniosek dodatkowy z zadania

Gdy funkcja Lagrange'a ma postać $L = L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

(w przykładzie $q_1 = r$ oraz $\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\phi}$) to $\dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = const$

i funkcja Hamiltona zależy tylko od 2 zmiennych zależnych od czasu :

współrzędnej q_1 i pędu $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ (w przykładzie r oraz p_r)

Pęd p_2 (w zadaniu $p_2 = p_\phi = L_z$) jest stałą ruchu i można go wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.

Powyższe uproszczenie nie zachodzi dla funkcji Lagrange'a gdyż z tego iż

$p_2 = const$ **nie wynika** iż $\dot{q}_2 = const$

W ogólności może zachodzić $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \neq const$ nawet wtedy gdy $p_2 = const$

(w przykładzie $\dot{\phi} \neq const$ mimo tego iż $p_\phi = mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\phi} = L_z = const$)

Ogólnie Gdy wśród f współrzędnych uogólnionych k współrzędnych jest współrzędnymi cyklicznymi (czyli funkcje Lagrange'a i Hamiltona od nich nie zależą) to funkcja Hamiltona zależy tylko od $f-k$ współrzędnych i pędów zależnych od czasu (może też jawnie zależeć od czasu). Pozostałe k pędów (sprzężonych kanonicznie ze współrzędnymi cyklicznymi) występujących w funkcji Hamiltona jest stałymi ruchu i można je wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.