Zad. 1 (seria V). Maksymalna wartość prędkości punktu drgającego ruchem harmonicznym jest równa V_m, a wartość jego maksymalnego przyspieszenia a_m. Znaleźć funkcje opisująca zależność położenia tego punktu od czasu wiedząc, iż w chwili t=0 punkt znajdował się w położeniu, w którym na punkt nie działała żadna siła. Czy podane warunki jednoznacznie pozwalają na wyznaczenie ruchu punktu?

Dane $V_m, a_m, F(t=0)=0$ Szukane $x(t)$

Wychylenie od położenia równowagi punktu wykonującego drgania harmoniczne nietłumione można zapisać w postaci:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Prędkość i przyspieszenie tego punktu można wyrazić wzorem:

$$\frac{d(\cos(bt+c))}{dt} = -b\sin(bt+c) \quad b,c\text{-stałe} \qquad \frac{d(\sin(bt+c))}{dt} = b\cos(bt+c)$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad a_x = \frac{dV_x}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Maksymalne wartości prędkości i przyspieszenia

$$V_m = |V_x|_{\max} = A\omega \Rightarrow \omega = \frac{V_m}{A} \qquad \boxed{\omega = \frac{V_m a_m}{V_m^2} = \frac{a_m}{V_m}}$$

$$a_m = |a_x|_{\max} = A\omega^2 \Rightarrow a_m = A\frac{V_m^2}{A^2} \Rightarrow a_m = \frac{V_m^2}{A} \Rightarrow \boxed{A = \frac{V_m^2}{a_m}}$$

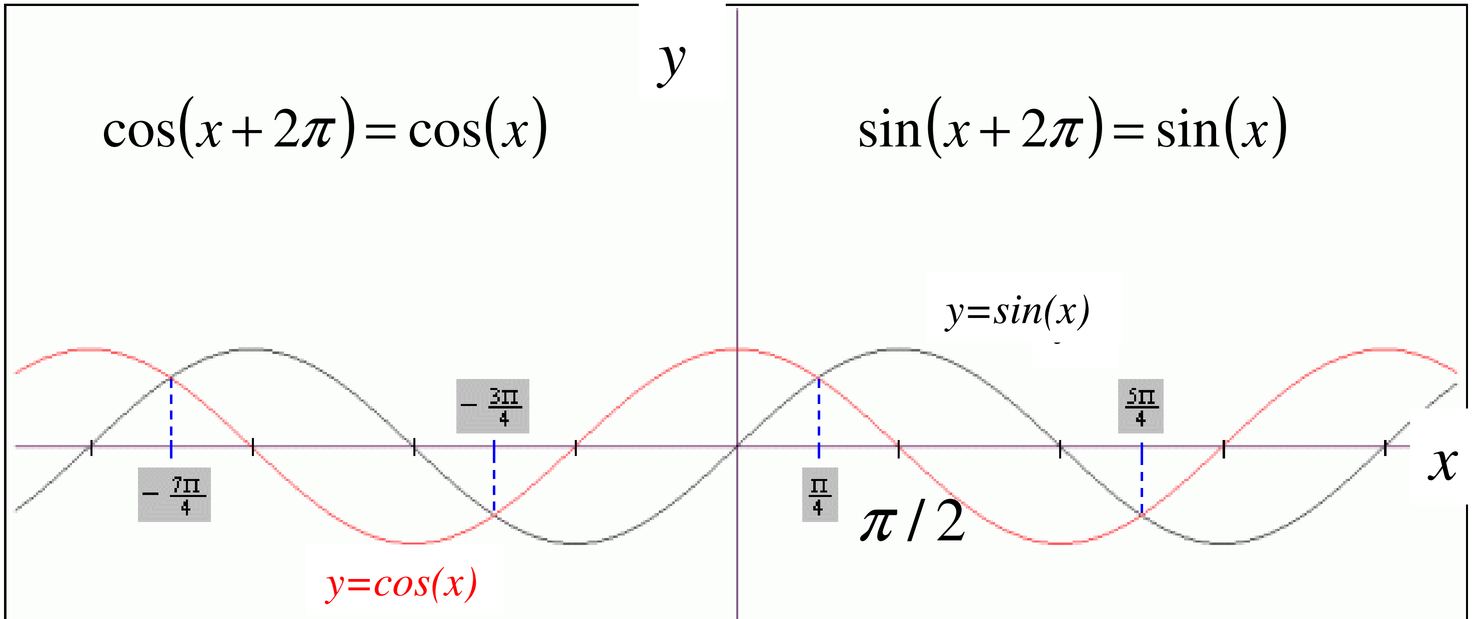
Siła wypadkowa $F_x = ma_x = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$

$$F_x(t=0) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$ (n-liczba całkowita)

$$A = \frac{V_m^2}{a_m} \qquad \omega = \frac{a_m}{V_m}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = \; x = \frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x) \qquad \sin(x+2\pi)=\sin(x)$$



$$\cos(x+\pi)=-\cos(x) \qquad \sin(x+\pi)=-\sin(x)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x) \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(x)$$

Gdy n jest liczbą parzystą to

$$x=\frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{V_m^2}{a_m}\sin\left(\frac{a_m}{V_m}t\right)$$

Gdy n jest liczbą nieparzystą to

$$x=\frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t+n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{V_m^2}{a_m}\cos\left(\frac{a_m}{V_m}t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{V_m^2}{a_m}\sin\left(\frac{a_m}{V_m}t\right)$$

Ostatecznie $$x = \pm \frac{V_m^2}{a_m} \sin\left(\frac{a_m}{V_m} t\right)$$

Informacje podane w zadaniu nie precyzują, w którą stronę poruszał się punkt w chwili początkowej, co nie pozwala na określenie jednoznaczne znaku końcowego wyrażenia na zależność wychylenia punktu od położenia równowagi w funkcji czasu opisanego powyższym wzorem