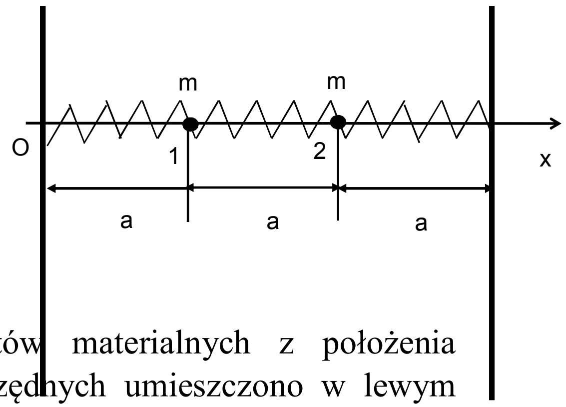
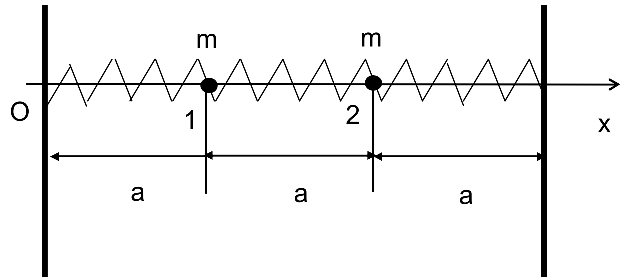
Zadanie 1 (seria IV). Dwa punkty materialne o tej samej masie równej *m* mogą poruszać się po nieruchomym, umieszczonym poziomo gładkim pręcie o długości $3a$. Punkty te połączone są między sobą i końcami pręta za pomocą 3 sprężyn spełniających prawo Hooke'a. Wiadomo, iż współczynnik sprężystości każdej ze sprężyn jest równy *k*, zaś długość każdej ze sprężyn w stanie gdy sprężyna nie jest naprężona jest równa a .



Przyjmujemy za współrzędne uogólnione wychylenie punktów materialnych z położenia równowagi $q_1 = x_1 - a$, $q_2 = x_2 - 2a$ (początek układu współrzędnych umieszczono w lewym końcu pręta).

1) Pokazać iż energię kinetyczną układu można przedstawić wzorem $T = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{22}\dot{q}_2^2 + M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1\right)$ gdzie $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$-stałe, $M_{12} = M_{21}$.
   Znaleźć wartości stałych $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$ (niektóre z nich mogą być równe zeru).
2) Znaleźć energię potencjalną układu jako funkcję współrzędnych uogólnionych q_1, q_2. Pokazać iż energia ta przyjmuje wartość minimalną gdy $q_1 = q_2 = 0$ oraz to iż można ją przedstawić wzorem:
   $$V = \frac{1}{2}\left(K_{11}q_1^2 + K_{22}q_2^2 + K_{12}q_1q_2 + K_{21}q_2q_1\right) + const$$
   gdzie $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$ -stałe , $K_{12} = K_{21}$.
   Znaleźć wartości stałych $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, const$ (niektóre z nich mogą być równe zeru).
3) Wyznaczyć częstości kołowe drgań i ogólną zależność od czasu współrzędnych q_1, q_2 w trakcie ruchu.
4) Znaleźć współrzędne normalne u_1 oraz u_2 i wyrazić funkcję Lagrange'a za pomocą współrzędnych normalnych u_1 oraz u_2 oraz ich pochodnych po czasie.

Dwa stopnie swobody $\Rightarrow$ 2 współrzędne uogólnione q_1, q_2



Wybór współrzędnych uogólnionych musi być tak przeprowadzony iż w położeniu równowagi $q_1 = q_2 = 0$

$$q_1 = x_1 - a, \qquad q_2 = x_2 - 2a$$

Energia kinetyczna $T = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$

$$q_1 = x_1 - a, \quad q_2 = x_2 - 2a \Rightarrow \qquad \dot{q}_1 = \dot{x}_1, \quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2 \Rightarrow \qquad T = \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{q}_2^2 \qquad (1)$$

W przypadku małych drgań $T = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{f} M_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l$ gdzie $M_{jl} = M_{lj}$, M_{jl} stałe

W rozważanym zadaniu liczba stopni swobody f=2 i

$$T = \frac{1}{2}\left(M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{22}\dot{q}_2^2 + M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1\right) \qquad (2)$$

Wzór (1) zgodny z (2) gdy przyjmiemy iż

$$M_{11} = M_{22} = m \qquad M_{12} = M_{21} = 0$$

Ze współczynników typu M_{jl} możemy utworzyć macierz kwadratową

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

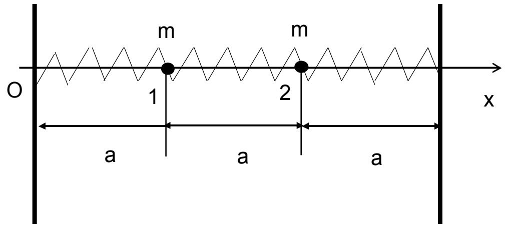
Energia potencjalna (potencjał)

Energia potencjalna jest sumą energii trzech rozciągniętych o Δl_i (i=1,2,3) (lub ściśniętych gdy Δl_i<0) sprężyn:

$$V = \frac{k}{2}\left[(\Delta l_1)^2 + (\Delta l_2)^2 + (\Delta l_3)^2\right] = \frac{k}{2}\left[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2 + (2a - x_2)^2\right]$$

Można pokazać iż siły działające na 1 i 2 ciało są równe

$$F_{1x} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x_1 - a) + k(x_2 - x_1 - a) = -k\Delta l_1 + k\Delta l_2$$



$$F_{2x} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} = k(2a - x_2) - k(x_2 - x_1 - a) = k\Delta l_3 - k\Delta l_2$$

Inny sposób $\quad V = -\int F_{1x} dx_1 + C(x_2) = 2k\int x_1 dx_1 - k\int x_2 dx_1 + C(x_2) = kx_1^2 - kx_1x_2 + C(x_2)$

$$F_{2x} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} \Rightarrow k(2a - x_2) - k(x_2 - x_1 - a) = kx_1 - \frac{dC(x_2)}{dx_2}$$

$$C(x_2) = \int(-3ka + 2kx_2)dx_2 + const = -3kax_2 + kx_2^2 + const$$

Wzór zgodny z poprzednim gdy const=3ka^2

Uzależnienie *V* od współrzędnych uogólnionych q_1, q_2

$$q_1 = x_1 - a \Rightarrow x_1 = q_1 + a$$
$$q_2 = x_2 - 2a \Rightarrow x_2 = q_2 + 2a$$
$$\Rightarrow V = \frac{k}{2}\left[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2 + (2a - x_2)^2\right] =$$
$$= \frac{k}{2}\left[(q_1)^2 + (q_2 - q_1)^2 + (-q_2)^2\right] = \frac{1}{2}\left[2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2\right]$$

Energia ta przyjmuje wartość minimalną równą zeru gdy $q_1 = q_2 = 0$, które to położenie odpowiada stabilnemu (trwałemu) położeniu równowagi.

W ogólnym przypadku małych drgań

$$V = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{f} K_{jl} q_j q_l + const \quad \text{gdzie } K_{jl} = K_{lj} \text{ ; } K_{jl} \text{ stałe.}$$

W rozważanym zadaniu liczba stopni swobody *f*=2 i

$$V = \frac{1}{2}\left(K_{11}q_1^2 + K_{22}q_2^2 + K_{12}q_1 q_2 + K_{21}q_2 q_1\right) + const \qquad (3)$$

gdzie $K_{12} = K_{21}$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika iż

$$V = \frac{1}{2}\left[2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2\right]$$

$$2q_1q_2 = q_1q_2 + q_2q_1 \Rightarrow V = \frac{1}{2}\left[2kq_1^2 - kq_1q_2 - kq_2q_1 + 2kq_2^2\right] \qquad (4)$$

Wzór (3) zgodny z (4) gdy $K_{11} = K_{22} = 2k \qquad K_{12} = K_{21} = -k \qquad const = 0$

Ze współczynników typu K_{jl} możemy też utworzyć macierz kwadratową

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \qquad \hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie częstości kołowych drgań

Tworzymy macierz kwadratową

$$\hat{K} - \omega^2 \hat{M} = \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}.$$

Częstości drgań spełniają równanie

$$\det\left[\hat{K} - \omega^2 \hat{M}\right] = \left|\hat{K} - \omega^2 \hat{M}\right| = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Po policzeniu wyznacznika

$$\left(2k - m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2k - m\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

lub

$$2k - m\omega^2 = -k \Rightarrow \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Wyznaczenie zależności współrzędnych uogólnionych od czasu

Wprowadzamy macierze $C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix}$ takie iż

zależność współrzędnych uogólnionych od czasu można zapisać wzorem

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{f=2} C^{(i)} \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^{2} \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

Wyznaczmy te macierze z dokładnością do stałej korzystając z równań

$$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right) C^{(i)} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_i^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad i=1,2 \qquad (5)$$

1) $$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_1^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wynikają stąd dwa równoważne sobie równania o postaci $kC_1^{(1)} - kC_2^{(1)} = 0 \Rightarrow C_2^{(1)} = C_1^{(1)}$

2) $$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega_2^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wynikają stąd dwa równoważne sobie równania o postaci $-kC_1^{(2)} - kC_2^{(2)} = 0 \Rightarrow C_2^{(2)} = -C_1^{(2)}$

Można sprawdzić że macierze wyznaczone $C^{(1)}, C^{(2)}$ spełniają równania $C^{(2)T} \hat{M} C^{(1)} = C^{(1)T} \hat{M} C^{(2)} = 0$

gdzie $C^{(i)T} = \begin{bmatrix} C_1^{(i)} & C_2^{(i)} \end{bmatrix}$

Ostatecznie

$$C_2^{(1)} = C_1^{(1)}$$

$$C_2^{(2)} = -C_1^{(2)}$$

$$q_1 = C_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$q_2 = C_2^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = C_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - C_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Powyżej zapisane równania określające zależność współrzędnych q_1, q_2 od czasu zależą w ogólności od czterech stałych dowolnych $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2$, które można określić z warunków początkowych ruchu.

W przypadku drgań o częstości $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oba ciała drgają w tej samej fazie, przy czym amplitudy drgań obu ciał są jednakowe.

W przypadku drgań o częstości $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ oba ciała drgają w przeciwnych fazach, przy czym amplitudy drgań obu ciał są jednakowe.

Określenie współrzędnych normalnych

Szukamy macierzy $\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} \\ \chi_2^{(1)} \end{bmatrix}$ oraz $\chi^{(2)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix}$

spełniających równania

$$\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)\chi^{(i)} = 0 \qquad i=1,2 \qquad (6)$$

$$\left(\chi^{(i)}\right)^T \left(\hat{M}\right)\chi^{(i)} = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1\,gdy & i = j \\ 0\,gdy & i \neq j \end{Bmatrix} \qquad i=1,2 \qquad (7)$$

gdzie $\left(\chi^{(i)}\right)^T = \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)} \end{bmatrix}$ oznacza macierz wierszową transponowaną do macierzy kolumnowej $\chi^{(i)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix}$ (i=1,2)

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Równania (6) mają jednakową postać jak równania (5) $\left(\hat{K} - \omega_i^2 \hat{M}\right)C^{(i)} = 0$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(1)} = C_1^{(1)} \Rightarrow \quad \chi_2^{(1)} = \chi_1^{(1)}$$

$$C_2^{(2)} = -C_1^{(2)} \Rightarrow \chi_2^{(2)} = -\chi_1^{(2)}$$

Równania (7) gdy *j=i* można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} & \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1^{(i)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow m\left[\left(\chi_1^{(i)}\right)^2 + \left(\chi_2^{(i)}\right)^2\right] = 1 \Rightarrow 2m\left(\chi_1^{(i)}\right)^2 = 1 \Rightarrow \quad \chi_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \text{(i=1,2)}$$

$$\chi_2^{(1)} = \chi_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \qquad \chi_2^{(2)} = -\chi_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2m}}$$

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} \\ \chi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Macierze $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ powinny ponadto spełniać równania $\left(\chi^{(2)}\right)^T \left(\hat{M}\right)\chi^{(1)} = 0$, $\left(\chi^{(1)}\right)^T \left(\hat{M}\right)\chi^{(2)} = 0$ które w rozważanym przypadku gdy $\omega_2 \neq \omega_1$ (czyli nie występuje degeneracja), a macierze $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ są rzeczywiste są spełnione automatycznie gdy spełnione jest równanie (6) , co można łatwo sprawdzić np.

$$\left(\chi^{(2)}\right)^T \left(\hat{M}\right)\chi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}}[1,-1]\cdot m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1,-1]\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Współrzędne normalne u_1, u_2 można wprowadzić tak iż spełniają one poniższe równanie:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \hat{W}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_1^{(2)} \\ \chi_2^{(1)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Z powyższego równania macierzowego wynika iż

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(u_1 + u_2\right) \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(u_1 - u_2\right)$$

W celu uzyskania relacji odwrotnych do relacji powyższych można wykorzystać równanie

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left(\hat{W}^{-1}\right)^T \cdot \hat{M} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_2^{(1)} \\ \chi_1^{(2)} & \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{2}}\left(q_1 + q_2\right) \\ \sqrt{\frac{m}{2}}\left(q_1 - q_2\right) \end{bmatrix}$$

skąd wynikają relacje określające współrzędne normalne $u_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left(q_1 + q_2\right) \quad u_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}\left(q_1 - q_2\right)$

Funkcja Lagrange'a przy użyciu współrzędnych normalnych

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(u_1 + u_2) \Rightarrow \qquad \dot{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(u_1 - u_2) \Rightarrow \qquad \dot{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left[2kq_1^2 - 2kq_1q_2 + 2kq_2^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{1}{2m}\left[(\dot{u}_1 + \dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{2m}\left[2k(u_1 + u_2)^2 - 2k(u_1 + u_2)(u_1 - u_2) + 2k(u_1 - u_2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\dot{u}_1^2 + 2\dot{u}_2^2\right] - \frac{1}{4m}\left[2ku_1^2 + 6ku_2^2\right] = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2\right] - \frac{1}{2}\frac{k}{m}u_1^2 - \frac{1}{2}\frac{3k}{m}u_2^2$$

$$L = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2\right] - \frac{1}{2}\omega_1^2u_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2u_2^2$$

W funkcji Lagrange'a nie występują wyrazy zależne od iloczynów różnych współrzędnych lub prędkości normalnych.

Równania Lagrange'a II rodzaju we współrzędnych normalnych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = 0$$

Opisują one dwa niezależne oscylatory o częstościach kołowych drgań $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oraz $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.