



OMNIS2

Zadanie I (seria II) . Punkt materialny o masie m porusza się w przestrzeni trójwymiarowej po powierzchni o równaniu $z = bx^2$ (b -znana stała) pod wpływem siły ciężkości skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ (składowe siły ciężkości są równe $F_x = F_y = 0, F_z = -mg$).

- 1) Napisać równania Lagrange'a I rodzaju opisujące ruch tego punktu materialnego.
- 2) Znaleźć siłę reakcji działającą na punkt materialny w chwili czasu $t = t_0$ wiedząc, iż $x(t = t_0) = x_0$, zaś $\dot{x}(t = t_0) = \dot{x}_0$.

Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

Równanie więzów: $f(x, z) = z - bx^2 = 0$

Siła reakcji jest prostopadła do powierzchni po której porusza się ciało i można ją zapisać w układzie kartezjańskim wzorem

$$\vec{F}_R = \lambda \text{grad} f = \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (-2\lambda bx, 0, \lambda)$$

gdzie λ -nieoznaczony mnożnik Lagrange'a

Zapis równań Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -2\lambda bx$$

$$m\ddot{r} = \vec{F} + \vec{F}_R \Rightarrow m\ddot{r} = \vec{F} + \lambda \text{grad} f \Rightarrow m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg + \lambda$$

$$\vec{F}_R = [-2\lambda bx, 0, \lambda]$$

Wyrażenie składowych siły reakcji jako funkcji $x, \dot{x}$

Musimy uzależnić nieoznaczony mnożnik Lagrange'a λ tylko od powyższych wielkości.

Różniczkujemy dwukrotnie równanie więzów $f(x, z) = z - bx^2 = 0$ po czasie

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{f} = -2bx\dot{x} + \dot{z} = 0$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{z}} \ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{f} = -2b\dot{x}^2 - 2bx\ddot{x} + \ddot{z} = 0 \quad (*)$$

Uzależniamy $\ddot{x}, \ddot{z}$ stojące w powyższym równaniu od x i λ korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju i wstawiamy otrzymane wyrażenia do równania (*)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda bx \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-2\lambda bx}{m} \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda \Rightarrow \ddot{z} = -g + \frac{\lambda}{m} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \ddot{f} = -2b\dot{x}^2 + \frac{4\lambda b^2 x^2}{m} - g + \frac{\lambda}{m} = 0$$

$$-2b\dot{x}^2 + \frac{4\lambda b^2 x^2}{m} - g + \frac{\lambda}{m} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{m}(4b^2 x^2 + 1) = 2b\dot{x}^2 + g \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2mb\dot{x}^2 + mg}{4b^2 x^2 + 1}$$

$$\vec{F}_R = (-2\lambda bx, 0, \lambda) \Rightarrow$$

$$F_{Rx} = -2\lambda bx = \frac{-4mb^2 x\dot{x}^2 - 2mbxg}{4b^2 x^2 + 1}, F_{Ry} = 0, F_{Rz} = \lambda = \frac{2mb\dot{x}^2 + mg}{4b^2 x^2 + 1}$$

Uzależniliśmy składowe siły reakcji działającej na ciało od wielkości $x, \dot{x}$

W szczególności składowe te w chwili czasu $t=t_0$ gdy $x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$

są równe

$$F_{Rx} = \frac{-4mb^2 x_0 \dot{x}_0^2 - 2mbx_0 g}{4b^2 x_0^2 + 1}, \quad F_{Ry} = 0, \quad F_{Rz} = \lambda = \frac{2mb\dot{x}_0^2 + mg}{4b^2 x_0^2 + 1}$$