Zadanie 1 seria II

Punkt materialny o masie m zsuwa się pod wpływem siły ciężkości $\vec{F}=(0,0,-mg)$ po gładkiej spirali opisanej równaniami :

$x=a\cos(kz)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y=a\sin(kz)$

gdzie a,k to znane stałe, $a>0$. Wyznaczyć ruch punktu materialnego przy pomocy:

a) równań Lagrange'a pierwszego rodzaju.
b) zasady d'Alemberta

Wiadomo, że $z(t=0)=z_0$ oraz $\dot{z}(t=0)=\dot{z}_0$. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g.

Znaleźć zależność od czasu siły reakcji działającej na punkt materialny.

Zasada d'Alemberta w przypadku pojedynczego punktu materialnego o masie *m*

$$\left(\vec{F}-m\ddot{\vec{r}}\right)\cdot\delta\vec{r}=0\Rightarrow\left(F_x-m\ddot{x}\right)\delta x+\left(F_y-m\ddot{y}\right)\delta y+\left(F_z-m\ddot{z}\right)\delta z=0\Rightarrow$$

gdzie $\vec{F}=[F_x,F_y,F_z]$ siła wypadkowa bez uwzględnienia sił reakcji więzów,
$\delta\vec{r}=[\delta x,\delta y,\delta z]$ dowolny wektor przesunięcia wirtualnego spełniający poniższe warunki

$$grad f_k\cdot\delta\vec{r}=0\Rightarrow\quad\frac{\partial f_k}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f_k}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f_k}{\partial z}\delta z=0$$ *- k=1...........,p*

gdzie

$f_k(\vec{r},t)=0$ *- k=1...........,p - równania p więzów*

W przestrzeni trójwymiarowej p=1 -ruch po powierzchni, p=2 -ruch po krzywej

Wyznaczenie ruchu ciała przy pomocy zasady d'Alemberta

Analizujemy ruch po krzywej w przestrzeni trójwymiarowej

Równania więzów (p=2):

$$f_1(x,z) = x - a\cos(kz) = 0 \qquad f_2(y,z) = y - a\sin(kz) = 0$$ (więzy skleronomiczne)

Warunki na wektor przesunięcia wirtualnego $\delta\vec{r}$

$$k=1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0 \Rightarrow \delta x + ak\sin(kz)\delta z = 0 \Rightarrow \delta x = -ak\sin(kz)\delta z$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0 \Rightarrow \delta y - ak\cos(kz)\delta z = 0 \Rightarrow \delta y = ak\cos(kz)\delta z$$

Zapis głównego równania zasady d'Alemberta

Siła wypadkowa $\vec{F} = [0,0,-mg]$.

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x + (F_y - m\ddot{y})\delta y + (F_z - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow -m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y + (-mg - m\ddot{z})\delta z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}ak\sin(kz) - m\ddot{y}ak\cos(kz) - mg - m\ddot{z})\delta z = 0$$

δz dowolne $\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}ak\sin(kz) - m\ddot{y}ak\cos(kz) - mg - m\ddot{z} = 0}$

Otrzymaliśmy 1 równanie ruchu bo układ ma 1 stopień swobody (ruch jednego punktu materialnego po krzywej)

Równanie powyższe trzeba rozwiązać przy uwzględnieniu równań więzów

Z równania więzów

$$x = a\cos(kz) \Rightarrow \ \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial z}\dot{z} = -ak\sin(kz)\dot{z} \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}}\ddot{z} = -ak^2\cos(kz)\dot{z}^2 - ak\sin(kz)\ddot{z}$$

$$y = a\sin(kz) \Rightarrow \ \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial z}\dot{z} = ak\cos(kz)\dot{z} \quad \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}}\ddot{z} = -ak^2\sin(kz)\dot{z}^2 + ak\cos(kz)\ddot{z}$$

$$m\ddot{x}ak\sin(kz) - m\ddot{y}ak\cos(kz) - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$-ma^2k^3\sin(kz)\cos(kz)\dot{z}^2 - ma^2k^2\sin^2(kz)\ddot{z} + ma^2k^3\sin(kz)\cos(kz)\dot{z}^2 - ma^2k^2\cos^2(kz)\ddot{z} - mg - m\ddot{z} = 0$$

$$-ma^2k^2\left[\sin^2(kz) + \cos^2(kz)\right]\ddot{z} - mg - m\ddot{z} = 0 \Rightarrow -m\left(a^2k^2 + 1\right)\ddot{z} - mg = 0 \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{g}{\left(a^2k^2+1\right)}$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{\left(a^2k^2+1\right)} \Rightarrow \dot{z} = -\frac{g}{\left(a^2k^2+1\right)}t + A \Rightarrow \quad z = -\frac{g}{2\left(a^2k^2+1\right)}t^2 + At + B$$

$$z(t=0) = z_0$$

$$z(t=0) = B$$

$$B = z_0$$

$$\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$$

$$\dot{z}(t=0) = A$$

$$A = \dot{z}_0$$

$$z = -\frac{g}{2\left(a^2k^2+1\right)}t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

;

Równania Lagrange'a I rodzaju w trakcie ruchu pojedynczego punktu materialnego

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, gradf_k$$

λ_k oznaczają nieoznaczone mnożniki Lagrange'a.

Po rozpisaniu na składowe

$$m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \qquad m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z}$$

gdzie

$f_k(\vec{r}, t) = 0$ *- k=1…………,p - równania p więzów*

W przestrzeni trójwymiarowej p=1 -ruch po powierzchni, p=2 -ruch po krzywej

Rozwiązanie zadania przy pomocy równań Lagrange'a I rodzaju

Siła wypadkowa $\vec{F} = [0,0,-mg]$.

$$f_1(x,z) = x - a\cos(kz) = 0 \qquad f_2(y,z) = y - a\sin(kz) = 0$$

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$m\ddot{x} = F_x + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \qquad (*)$$

$$m\ddot{y} = F_y + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = 0 + 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \qquad (**)$$

$$m\ddot{z} = F_z + \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \Rightarrow m\ddot{z} = -mg + ak\sin(kz)\lambda_1 - ak\cos(kz)\lambda_2 \qquad (***)$$

Eliminacja nieoznaczonych mnożników Lagrange'a λ_1 i λ_2 w równaniu (***) przy pomocy równań (*) i (**) daje

$$m\ddot{z} = -mg + mak\sin(kz)\ddot{x} - mak\cos(kz)\ddot{y}$$

(dalsze rozwiązanie takie jak w metodzie opartej o równanie d'Alemberta)

Wyznaczenie składowych siły reakcji w układzie kartezjańskim

Pokazano iż $f_1(x,z) = x - a\cos(kz) = 0$ $\quad f_2(y,z) = y - a\sin(kz) = 0$

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \qquad (*)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \qquad (**)$$

$$m\ddot{z} = ak\sin(kz)\lambda_1 - ak\cos(kz)\lambda_2 - mg \qquad (***)$$

$$\ddot{x} = -ak^2\cos(kz)\dot{z}^2 - ak\sin(kz)\ddot{z} \qquad \ddot{y} = -ak^2\sin(kz)\dot{z}^2 + ak\cos(kz)\ddot{z}$$

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \, gradf_k \Rightarrow$$

$$z = -\frac{g}{2(a^2k^2+1)}t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

$$F_{Rx} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} = \lambda_1 = m\ddot{x} = -mak^2\cos(kz)\dot{z}^2 - mak\sin(kz)\ddot{z}$$

gdzie $\dot{z} = -\frac{g}{(a^2k^2+1)}t + \dot{z}_0$

$$F_{Ry} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} = \lambda_2 = m\ddot{y} = -mak^2\sin(kz)\dot{z}^2 + mak\cos(kz)\ddot{z}$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{(a^2k^2+1)}$$

$-F_z$

$$F_{Rz} = \sum_{k=1}^{p=2} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} = ak\sin(kz)\lambda_1 - ak\cos(kz)\lambda_2 = m\ddot{z} + mg = -\frac{mg}{a^2k^2+1} + mg = mg\frac{a^2k^2}{a^2k^2+1}$$

Z (***)