

Zadanie 1 (seria I). W układach krzywoliniowych ortogonalnych, w których do określenia położenia służą współrzędne $q_i (i=1,2,3)$, wektory wodzący $\vec{r}$, prędkości $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ i

przyspieszenia $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ można przedstawić w następujących postaciach opisujących rozkład tych wektorów na składowe:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

gdzie $\vec{e}_i$ -wersory układu krzywoliniowego spełniające relacje

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \quad i = j \\ 0 & \text{gd}y \quad i \neq j \end{cases}, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Ponadto wiadomo iż wersor $\vec{e}_i$ w dowolnym punkcie przestrzeni jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko współrzędna q_i i wskazuje kierunek przy przesuwaniu się wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta.

1) Pokazać iż zachodzą następujące relacje:

$$\text{a) } \vec{e}_i = \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \right) \quad \text{b) } r_i = \frac{1}{2L_i} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i}$$

$$\text{c) } v_i = L_i \dot{q}_i \quad \text{d) } a_i = \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right]$$

gdzie: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -wersory układu kartezjańskiego, x, y, z -składowe wektora wodzącego w układzie

kartezjańskim, q_i -współrzędne krzywoliniowe ($i=1,2,3$), $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$,

$$L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \text{ -współczynniki Lamé } (i=1,2,3),$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2(q_1, q_2, q_3) + y^2(q_1, q_2, q_3) + z^2(q_1, q_2, q_3),$$

$$f(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2]$$

Pokazać iż moment pędu ciała o masie m można zapisać w następującej postaci z wykorzystaniem wyznacznika

$$\vec{L} = L_1 \vec{e}_1 + L_2 \vec{e}_2 + L_3 \vec{e}_3 = m \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

pozwalającej na znalezienie rozkładu tego wektora na składowe L_1, L_2, L_3 w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

3) Pokazać iż operator gradientu działający na funkcje skalarną zależną od współrzędnych uogólnionych można wyrazić wzorem $\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$

Wsk. (do udowodnienia)

$$1) \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (\text{do punktu 1d})$$

2) dla dowolnych dwóch wektorów o znanym rozkładzie na składowe w układzie krzywoliniowym ortogonalnym $\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$ oraz $\vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ zachodzi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3, \quad |\vec{A}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Krzywoliniowe układy współrzędnych

Położenie punktu materialnego w przestrzeni możemy opisywać nie tylko w układzie kartezjańskim lecz także w układach krzywoliniowych (np. cylindrycznym, sferycznym). W przestrzeni 3 DIM do określenia położenia punktu w przestrzeni wykorzystujemy 3 współrzędne q_i ($i=1,2,3$) przy czym współrzędne kartezjańskie są funkcjami tych współrzędnych $x = x(q_1, q_2, q_3)$ $y = y(q_1, q_2, q_3)$ $z = z(q_1, q_2, q_3)$

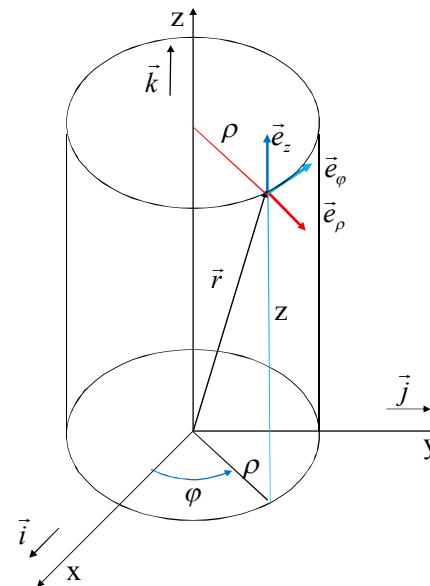
W układzie cylindrycznym $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$

Układ cylindryczny

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

$$z = z$$



W dalszych rozwiązaniach będziemy często stosować oznaczenia

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}}$$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \ddot{q}_i$$

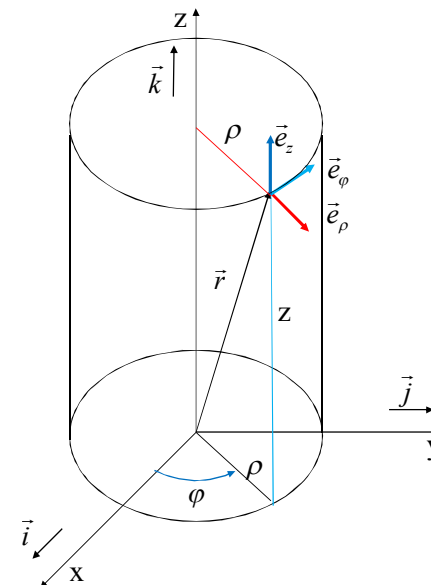
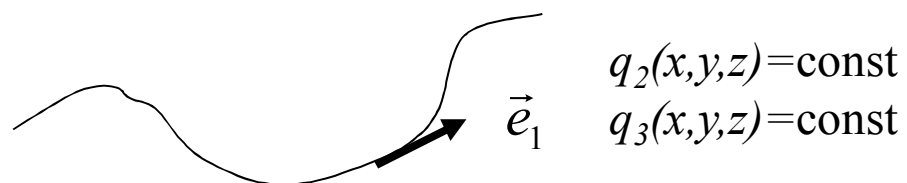
$$\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} = \ddot{\vec{A}}$$

Układy krzywoliniowe-Wersory, Rozkład wektora na składowe

W układzie krzywoliniowym dla każdego punktu przestrzeni wprowadza się 3 lokalne wersory

$$\vec{e}_i \quad (i=1,2,3).$$

Wersor $\vec{e}_i$ związany ze współzrzedną q_i jest wektorem o długości jednostkowej stycznym do linii przy przesuwaniu się wzdłuż której ulega zmianie wartość tylko współzrzednej q_i



Zwrot jego najczęściej wybiera się tak, iż wskazuje on kierunek wzdłuż którego wartość tej współzrzednej wzrasta. W układach **ortogonalnych** dla każdego punktu zachodzi relacja

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gd}y \quad i = j \\ 0 & \text{gd}y \quad i \neq j \end{cases}$$

W przeciwieństwie do wersorów w układzie kartezjańskim $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, kierunek wersorów w układach krzywoliniowych zależy od położenia punktu w przestrzeni i ulegają one zmianie w czasie przy przemieszczaniu się punktu w przestrzeni.

Dowolny wektor $\vec{A}$ można przedstawić w postaci kombinacji

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \quad \text{składowe } A_i - \text{składowe wektora } \vec{A} \text{ w układzie krzywoliniowym.}$$

W układzie kartezjańskim analogiczna relacja przyjmuje postać: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

Ponieważ $\dot{\vec{e}}_i \neq 0$ to **nie zachodzi** relacja

~~$$\dot{\vec{A}} = \sum_i \dot{A}_i \vec{e}_i$$~~

Iloczyn skalarny wektorów w układzie ortogonalnym

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= [A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3] \cdot [B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3] = A_1 B_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + A_1 B_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + A_1 B_3 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + \\ &+ A_2 B_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + A_2 B_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + A_2 B_3 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) + A_3 B_1 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + A_3 B_2 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) + A_3 B_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3\end{aligned}$$

Długość wektora **A** $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

Iloczyn wektorowy wektorów w układzie ortogonalnym prawoskrętnym

Założenie $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3) \times (B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3) = \\ &= A_1 B_1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + A_1 B_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + A_1 B_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &+ A_2 B_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + A_2 B_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + A_2 B_3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &+ A_3 B_1 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + A_3 B_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + A_3 B_3 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \\ &= A_1 B_1 \cdot 0 + A_1 B_2 \vec{e}_3 - A_1 B_3 \vec{e}_2 + \\ &- A_2 B_1 \vec{e}_3 + A_2 B_2 \cdot 0 + A_2 B_3 \vec{e}_1 + \\ &+ A_3 B_1 \vec{e}_2 - A_3 B_2 \vec{e}_1 + A_3 B_3 \cdot 0 =\end{aligned}$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{e}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Związek wersorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w układzie krzywoliniowym ortogonalnym z wersorami $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ układzie kartezjańskim:

Infinityzmalnie mała zmiana wektora wodzącego ciała w przestrzeni 3-DIM

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j$$

Zmiana wektora wodzącego ciała związana tylko ze zmianą współrzędnej q_i o dq_i

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$$

Wektor $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$ dla $dq_i > 0$ ma taki sam kierunek i zwrot co wersor $\vec{e}_i$

związany z tą współrzędną

A zatem wersor $\vec{e}_i$ związany ze współrzędną q_i ($i=1,2,3$) można przedstawić przy pomocy ogólnego wzoru:

$$\vec{e}_i = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|} = \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} &= \frac{\partial x}{\partial q_i} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \vec{k} \end{aligned}$$

gdzie $L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$ - współczynnik Lamé

Składowe wektora wodzącego

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i$$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$r_i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i = \vec{r} \cdot \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{2L_i} \left[\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{r} \right] = \frac{1}{2L_i} \frac{\partial}{\partial q_i} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2L_i} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_i = \frac{1}{2L_i} \frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i}$$

gdzie

$$|\vec{r}|^2(q_1, q_2, q_3) = x^2(q_1, q_2, q_3) + y^2(q_1, q_2, q_3) + z^2(q_1, q_2, q_3)$$

$$L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

Składowe wektora prędkości

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \vec{e}_i$$

bo gdy $A(q_1, q_2, q_3, t)$ to
$$\frac{dA}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial t}$$

gdy A nie zależy jawnie od czasu
to $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

$$\vec{e}_j = \frac{1}{L_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = L_j \vec{e}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 L_j \dot{q}_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 L_j \dot{q}_j \delta_{ji} = L_i \dot{q}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = L_i \dot{q}_i$$

$$L_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$$

Składowe wektora przyspieszenia

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$\vec{e}_i = \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Rightarrow a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_i = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \right]$$

Związki pomocnicze $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ Traktujemy zmienne $\dot{q}_i$ jako niezależne od q_i

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Wykorzystując je otrzymujemy:

$$a_i = \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \right] = \frac{1}{2L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial q_i} \right] = \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right] \Rightarrow$$

$$a_i = \frac{1}{L_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right]$$

gdzie

$$f(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2]$$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = [v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3] \cdot [v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3] = v_1^2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + v_2^2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + v_3^2 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) + 2[v_1 v_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + v_1 v_3 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + v_2 v_3 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Moment pędu

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i, \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = L_1 \vec{e}_1 + L_2 \vec{e}_2 + L_3 \vec{e}_3$$

gdzie $L_1 = r_2 v_3 - r_3 v_2$ $L_2 = r_3 v_1 - r_1 v_3$ $L_3 = r_1 v_2 - r_2 v_1$

Operator gradientu $grad = \nabla = \sum_{i=1}^3 grad_i \vec{e}_i$ gdzie $grad_i = \frac{1}{L_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$

Dowód: Infinitesimalnie mały przyrost dh funkcji h związany z przyrostami

dq_1, dq_2, dq_3 współrzędnych q_1, q_2, q_3

$$dh = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial q_i} dq_i$$

$$dh = grad h \cdot d\vec{r} = \sum_{j=1}^3 [grad h]_j \vec{e}_j \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} - \text{wektor równoległy do wersora } \vec{e}_i \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \vec{e}_i$$

$$dh = \sum_{j=1}^3 [grad h]_j \vec{e}_j \cdot \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i \right) \Rightarrow$$

$$dh = \sum_{j,i=1}^3 [grad h]_j \left(\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| dq_i \right) \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 [grad h]_i \left(\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| dq_i \right)$$

Z porównania wzorów
w ramkach

$$[grad h]_i = \frac{\partial h}{\partial q_i} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \frac{\partial h}{\partial q_i} / \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} = \frac{1}{L_i} \frac{\partial h}{\partial q_i}$$