Zadanie 1 (seria I). W układach krzywoliniowych ortogonalnych, w których do określenia położenia służą współrzędne $q_i \,(i=1,2,3)$, wektory wodzący $\vec{r}$, prędkości $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}$ i przyspieszenia $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}$ można przedstawić w następujących postaciach opisujących rozkład tych wektorów na składowe:

$$\vec{r}=\sum_{i=1}^{3} r_i\vec{e}_i \qquad \vec{v}=\sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}_i \qquad \vec{a}=\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$$

gdzie $\vec{e}_i$-wersory układu krzywoliniowego spełniające relacje

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & gdy \quad i=j\\ 0 & gdy \quad i\neq j\end{cases}, \ \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3, \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1, \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$$

Ponadto wiadomo iż wersor $\vec{e}_i$ w dowolnym punkcie przestrzeni jest styczny do linii wzdłuż której zmienia się tylko współrzędna q_i i wskazuje kierunek przy przesuwaniu się wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta.

1) Pokazać iż zachodzą następujące relacje:

a) $\vec{e}_i=\frac{1}{L_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{1}{L_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right)$ b) $r_i=\frac{1}{2L_i}\frac{\partial|\vec{r}|^2}{\partial q_i}$

c) $v_i=L_i\dot{q}_i$ d) $a_i=\frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_i}\right]$

gdzie: $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ -wersory układu kartezjańskiego, *x*,*y*,*z*–składowe wektora wodzącego w układzie kartezjańskim, q_i-współrzędne krzywoliniowe $(i=1,2,3)$, $\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}$,

$L_i=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ -współczynniki Lamé $(i=1,2,3)$,

$f(q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)=\frac{1}{2}|\vec{v}|^2=\frac{1}{2}\left[v_1^2+v_2^2+v_3^2\right]$

Wsk. do punktu *d*) do udowodnienia $\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}$

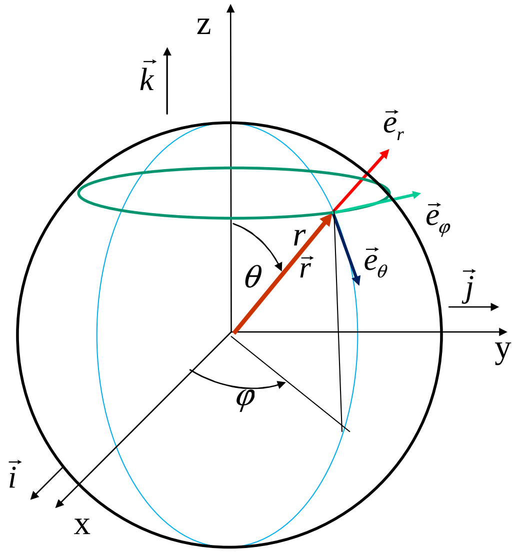
Krzywoliniowe układy współrzędnych

Położenie punktu materialnego w przestrzeni możemy opisywać nie tylko w układzie kartezjańskim lecz także w układach krzywoliniowych (np. cylindrycznym, sferycznym). W przestrzeni 3 DIM do określenia położenia punktu w przestrzeni wykorzystujemy 3 współrzędne q_i (i=1,2,3) przy czym współrzędne kartezjańskie sa funkcjami tych współrzędnych $x = x(q_1, q_2, q_3)$ $y = y(q_1, q_2, q_3)$ $z = z(q_1, q_2, q_3)$

W układzie sferycznym $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$

Układ sferyczny

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

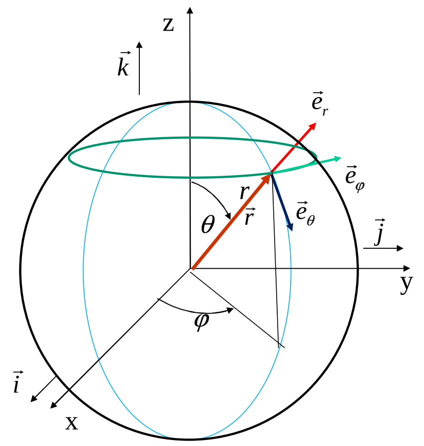


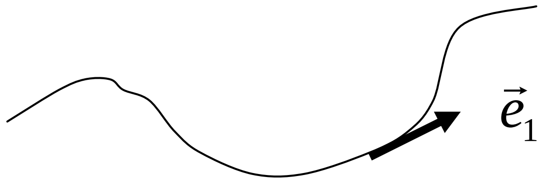
Układy krzywoliniowe-Wersory, Rozkład wektora na składowe

W układzie krzywoliniowym dla każdego punktu przestrzeni wprowadza się 3 lokalne wersory

$\vec{e}_i$ (i=1,2,3).

Wersor $\vec{e}_i$ związany ze współrzędną q_i jest wektorem o długości jednostkowej stycznym do linii przy przesuwaniu się wzdłuż której ulega zmianie wartość tylko współrzędnej q_i





$\vec{e}_1$ $q_{2,}q_3$=const,

Zwrot jego najczęściej wybiera się tak, iż wskazuje on kierunek wzdłuż którego wartość tej współrzędnej wzrasta. W układach ortogonalnych dla każdego punktu zachodzi relacja

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & gdy \quad i \neq j \end{cases}$$

W przeciwieństwie do wersorów w układzie kartezjańskim $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, które nie zależą od położenia punktu w przestrzeni i w układzie nieruchomym nie zmieniają się w czasie, kierunek wersorów w układach krzywoliniowych zależy od położenia punktu w przestrzeni i ulegają one zmianie w czasie przy przemieszczaniu się punktu w przestrzeni.

Dowolny wektor $\vec{A}$ można przedstawić w postaci kombinacji

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i$$

czyli znaleźć jego składowe A_i w układzie krzywoliniowym.

W układzie kartezjańskim analogiczna relacja przyjmuje postać: $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

Związek wersorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w układzie krzywoliniowym ortogonalnym z wersorami $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ układzie kartezjańskim:

Infinitezymalnie mała zmiana wektora wodzącego ciała w przestrzeni 3-DIM

$$\Delta\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\Delta q_j$$

Zmiana wektora wodzącego ciała związana tylko ze zmiana współrzędnej q_i o Δq_i

$$\Delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\Delta q_i$$

Wektor $\Delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\Delta q_i$ dla $\Delta q_i > 0$ ma taki sam kierunek i zwrot co wersor $\vec{e}_i$

związany z tą współrzędną
A zatem wersor $\vec{e}_i$ związany ze współrzędną q_i (i=1,2,3) można przedstawić przy pomocy ogólnego wzoru:

$$\boxed{\vec{e}_i = \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|} = \frac{1}{L_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right)}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}$$

gdzie $L_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ - współczynnik Lamé

Składowe wektora wodzącego $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \vec{e}_i$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$r_i = \vec{r} \cdot \vec{e}_i = \vec{r} \cdot \frac{1}{L_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{2L_i}\left[\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \vec{r}\right] = \frac{1}{2L_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2L_i}\frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow r_i = \frac{1}{2L_i}\frac{\partial |\vec{r}|^2}{\partial q_i}}$$

gdzie

$$|\vec{r}|^2(q_1, q_2, q_3) = x^2(q_1, q_2, q_3) + y^2(q_1, q_2, q_3) + z^2(q_1, q_2, q_3)$$

$$L_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

Składowe r_i zależą w ogólności od q_1, q_2, q_3 i nie zależą jawnie od czasu. Zmiany r_i w trakcie ruchu ciała wynikają ze zmian w czasie q_1, q_2, q_3

W dalszych rozwiązaniach będziemy często stosować konwencję

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \qquad \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} \qquad \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \ddot{q}_i \qquad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \ddot{\vec{A}}$$

Składowe wektora prędkości

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j\cdot\vec{e}_i$$

bo gdy $A(q_1, q_2, q_3, t)$

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial t}$$

gdy A nie zależy jawnie od czasu

to $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

$$\vec{e}_j = \frac{1}{L_j}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j} = L_j\vec{e}_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3}L_j\dot{q}_j\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3}L_j\dot{q}_j\delta_{ji} = L_i\dot{q}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = L_i\dot{q}_i}$$

$$L_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

Składowe wektora przyspieszenia

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$$

w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

$$\vec{e}_i = \frac{1}{L_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{e}_i = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{1}{L_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) - \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\right]$$

Związki pomocnicze

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Wykorzystując je otrzymujemy:

$$a_i = \frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right] = \frac{1}{2L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial |\vec{v}|^2}{\partial q_i}\right] = \frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{a_i = \frac{1}{L_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i}\right]}$$

gdzie $f(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}\left[v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right]$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = [v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3]\cdot[v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3] = v_1^2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) + v_2^2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) + v_3^2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3) +$$

$$+ 2[v_1v_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + v_1v_3(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + v_2v_3(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Moment pędu ciała o masie *m* w układzie krzywoliniowym ortogonalnym

Zakładamy iż wersory układu kartezjańskiego spełniają relację

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & gdy & i = j \\ 0 & gdy & i \neq j \end{Bmatrix} \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Dodatkowy znamy rozkład wektorów wodzącego oraz prędkości na składowe

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \vec{e}_i \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$$

Składowe momentu pędu w tym układzie można określić licząc wielkość proporcjonalną do wyznacznika odpowiednio skonstruowanej macierzy

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

Wzór analogiczny do wzoru otrzymanego dla układu kartezjańskiego

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Układ sferyczny

$$\vec{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} + \cos(\theta)\vec{k} \qquad \vec{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\vec{i} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\vec{j} - \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j} \qquad \vec{r} = r\vec{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + \left(2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = -mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi$$

Układ biegunowy

W przypadku ruchu w płaszczyźnie z=0 dwuwymiarowy układ wprowadzony w tej płaszczyźnie to układ biegunowy. Współrzędnymi w tym układzie są wielkości r oraz φ układu sferycznego. Natomiast mamy $\theta = \frac{\pi}{2}$ oraz $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

A zatem

$$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}$$

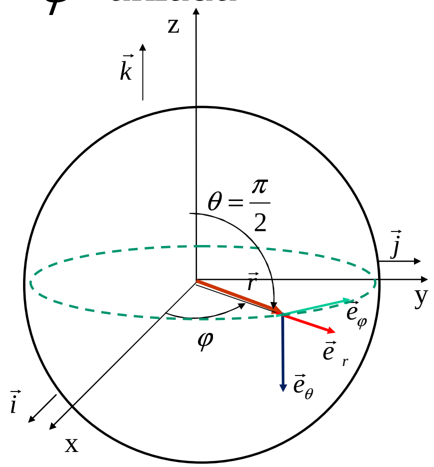
$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Wektor jednostkowy $\vec{e}_\theta$ jest prostopadły do płaszczyzny ruchu i skierowany w kierunku przeciwnym do zwrotu osi Oz

$$\vec{e}_\theta = -\vec{k}$$



W kierunku prostopadłym do płaszczyzny ruchu jest skierowany również moment pędu równy

$$\vec{L} = -mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

W układzie kartezjańskim moment pędu ma tylko składową z-ową równą $L_z = mr^2\dot{\varphi}$