



OMNIS2

Zadanie 15a (seria V).

1) Dla jakich wartości stałej α poniżej określone przekształcenie współrzędnej $q \rightarrow Q$ i pędu $p \rightarrow P$ jest przekształceniem kanonicznym?

$$Q = \alpha q + p$$

$$P = 2q + 3p$$

2) Znaleźć funkcje tworzącą $W(q, Q)$ oraz $S(q, P)$ dla tego przekształcenia.

Przekształcenie jest kanoniczne gdy $(Q_i, Q_j) = (P_i, P_j) = 0$ $(Q_i, Q_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, f$

gdzie
$$(A, B) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l} \frac{\partial B}{\partial q_l} \right)$$

W zadaniu liczba stopni swobody $f=1$, $q_1=q, p_1=p$ i przekształcenie będzie kanoniczne gdy

$$(Q, P) = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

Pozostałe dwa warunki zapisane przy pomocy nawiasów Poissona (sposób trzech, które można rozpatrywać gdy $f=1$) są spełnione na pewno na mocy samej definicji nawiasu i nie trzeba ich badać. (*)
W szczególności

$$(Q, Q) = (P, P) = 0 \quad \text{bo} \quad (A, A) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \frac{\partial A}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l} \frac{\partial A}{\partial q_l} \right) = 0$$

Kiedy przekształcenie będzie kanoniczne na mocy warunku (*)

$$Q = \alpha q + p$$

$$P = 2q + 3p$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 3$$

$$(Q, P) = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 3\alpha - 2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

Przekształcenie kanoniczne przyjmuje postać

$$Q = q + p \qquad P = 2q + 3p$$

Poszukiwanie funkcji tworzącej $W(q, Q)$

Funkcja ta musi spełniać warunki

$$p_l = \frac{\partial W}{\partial q_l} \qquad P_l = -\frac{\partial W}{\partial Q_l} \qquad l=1, \dots, f$$

1 stopień swobody $f=1$ czyli dwa warunki

$$p(q, Q) = \frac{\partial W(q, Q)}{\partial q} \qquad P(q, Q) = -\frac{\partial W(q, Q)}{\partial Q}$$

W celu ich wykorzystania trzeba znaleźć postać zależności $p = p(q, Q)$ oraz $P = P(q, Q)$

$$Q = q + p \Rightarrow p = Q - q$$

$$P = 2q + 3p \Rightarrow \overset{\swarrow}{P} = 2q + 3Q - 3q = -q + 3Q$$

$$p(q, Q) = \frac{\partial W(q, Q)}{\partial q} \Rightarrow W(q, Q) = \int p(q, Q) dq + C(Q) = \int (Q - q) dq + C(Q) = Qq - \frac{q^2}{2} + C(Q)$$

Powyżej określono funkcję $W(q, Q)$ z dokładnością do funkcji $C(Q)$ zależnej od Q , którą

można określić opierając się na relacji $P(q, Q) = -\frac{\partial W(q, Q)}{\partial Q}$

$$W(q, Q) = Qq - \frac{q^2}{2} + C(Q)$$

$$P(q, Q) = -\frac{\partial W(q, Q)}{\partial Q} = -q - \frac{dC(Q)}{dQ} \quad \rightarrow \quad \frac{dC(Q)}{dQ} = -3Q \Rightarrow C(Q) = -\frac{3}{2}Q^2 + \text{const} \stackrel{np.}{=} -\frac{3}{2}Q^2$$

Z postaci transformacji kanonicznej wynika iż $P = -q + 3Q$

$$\text{Ostatecznie } W(q, Q) = Qq - \frac{q^2}{2} - \frac{3}{2}Q^2 \operatorname{ctg}(2q)$$

Poszukiwanie funkcji tworzącej $S(q, P)$

Funkcja ta musi spełniać warunki

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l} \quad Q_l = \frac{\partial S}{\partial P_l} \quad l=1, \dots, f$$

$$1 \text{ stopień swobody } f=1 \text{ czyli dwa warunki} \quad p(q, P) = \frac{\partial S(q, P)}{\partial q} \quad Q(q, P) = \frac{\partial S(q, P)}{\partial P}$$

W celu ich wykorzystania trzeba znaleźć postać zależności $p = p(q, P)$ oraz $Q = Q(q, P)$

$$P = 2q + 3p \Rightarrow p = \frac{1}{3}P - \frac{2}{3}q$$

$$\downarrow$$

$$Q = q + p \Rightarrow Q = \frac{1}{3}(q + P)$$

$$p(q, P) = \frac{\partial S(q, P)}{\partial q} \Rightarrow S(q, P) = \int p(q, P) dq + C(P) = \int \left(\frac{1}{3}P - \frac{2}{3}q \right) dq + C(P) = \frac{1}{3}Pq - \frac{1}{3}q^2 + C(P)$$

Powyżej określono funkcję $S(q, P)$ z dokładnością do funkcji $C(P)$ zależnej od P , którą

można określić opierając się na relacji $Q(q, P) = \frac{\partial S(q, P)}{\partial P}$

$$S(q, P) = \frac{1}{3}Pq - \frac{1}{3}q^2 + C(P)$$

$$Q(q, P) = \frac{\partial S(q, P)}{\partial P} = \frac{1}{3}q + \frac{dC(P)}{dP} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \frac{dC(P)}{dP} = \frac{P}{3} \Rightarrow C(P) = \frac{1}{6}P^2 + \text{const} \stackrel{np.}{=} \frac{1}{6}P^2$$

Z postaci transformacji kanonicznej wynika iż $Q = \frac{1}{3}(q + P)$

$$\text{Ostatecznie} \quad S(q, P) = \frac{1}{3}Pq - \frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{6}P^2$$