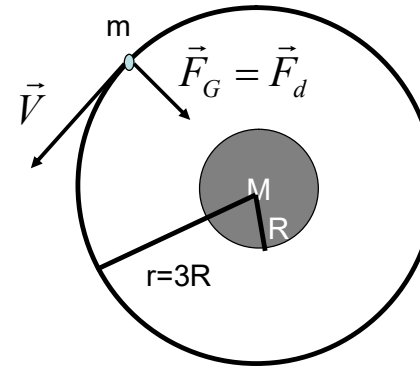


Zad. 14b (seria V). Rozważyć satelitę Ziemi o masie $m=500$ kg poruszającą się po orbicie kołowej o środku umieszczonym w środku Ziemi i o promieniu r równym $r=3R$ gdzie $R=6371$ km to promień Ziemi. Znana jest ponadto wartość przyspieszenia ziemskiego $g=9,8$ m/s².

- 1) Określić szybkość, energie kinetyczną, potencjalną oraz całkowitą mechaniczną satelity.
- 2) Określić wartość prędkości kątowej z jaką satelita się porusza oraz czas T potrzebny na okrążenie przez satelitę Ziemi.
- 3) Jaki musi być promień orbity r by czas ten równał się $T=24$ h?

Dane: $r=3R, R=6371$ km, $m=500$ kg, $g=9,8$ m/s²

Szukane $V, E_{kin}, E_{pot}, E, \omega, T, r$ gdy $T=24$ h



$$|\vec{F}_G| = \frac{GmM}{r^2}$$

$$|\vec{F}_d| = \frac{mV^2}{r}$$

$$E_{pot} = -\frac{GMm}{r}$$

- 1) Na orbicie okołoziemskiej o promieniu $r=3R$ siła przyciągania grawitacyjnego działającego na satelitę ze strony Ziemi jest skierowana w kierunku środka Ziemi a więc również środka okręgu po którym porusza się satelita i pełni rolę siły dośrodkowej $\vec{F}_G = \vec{F}_d$ skąd wynika że

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mV^2}{r} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

Wartość siły przyciągania ziemskiego działającej na satelitę o masie m znajdujące się na powierzchni Ziemi ($r=R$)

$$F_c = \frac{GMm}{R^2} \quad F_c = mg$$
$$g = \frac{GM}{R^2} \quad V = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{GM}{R^2} \frac{R^2}{3R}} = \sqrt{\frac{gR^2}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}} = 4,56 \text{ km/s}$$

Energie kinetyczna, potencjalna i całkowita satelity na orbicie o promieniu $3R$:

$$E_{kin} = \frac{mV^2}{2} = \frac{mgR}{6} = 5,2 \cdot 10^9 \text{ J} \quad E_{pot} = -\frac{GMm}{3R} = -\frac{GMm}{R^2} \frac{R}{3} = -\frac{mgR}{3} = -10,4 \cdot 10^9 \text{ J}$$
$$E = E_{kin} + E_{pot} = -\frac{mgR}{6} = -5,2 \cdot 10^9 \text{ J}$$

2) Prędkość kątowna i okres obiegu

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{3R} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{g}{3R}} = 23,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi \sqrt{\frac{3R}{g}} = 26,3 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 7,3 \text{ h}$$

3) W przypadku poruszania się satelity po orbicie o promieniu r szybkość jest równa :

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}$$

Okres obiegu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{gR^2}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{gR^2}$$

Promień orbity wynosi więc gdy $T=24\text{h}=86400\text{s}$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2 T^2}{4\pi^2}} \approx 42 \cdot 10^3 \text{ km}$$