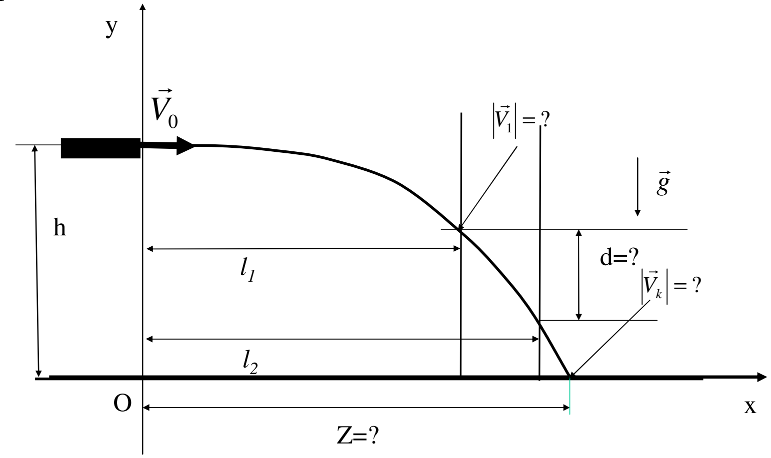
Zad. 13 (seria I). Kula wystrzelona poziomo ze strzelby znajdującej się na wysokości h nad ziemią z początkową szybkością (prędkością o wartości równej) V_0 przebiła dwie pionowo ustawione kartki papieru umieszczone w odległościach l_1 i l_2 od strzelby.



1) Określić wartość prędkości kuli w chwili przebijania kartki położonej w odległości l_1 od strzelby.
2) Określić różnice wysokości, na jakiej znajdują się otwory w kartkach.
3) Znaleźć równanie toru kuli w pokazanym na rysunku układzie współrzędnych.
4) Znaleźć odległość od początku układu współrzędnych do punktu, w którym kula uderzyła o ziemię oraz wartość prędkości kuli tuż przez jej spadkiem na ziemię.

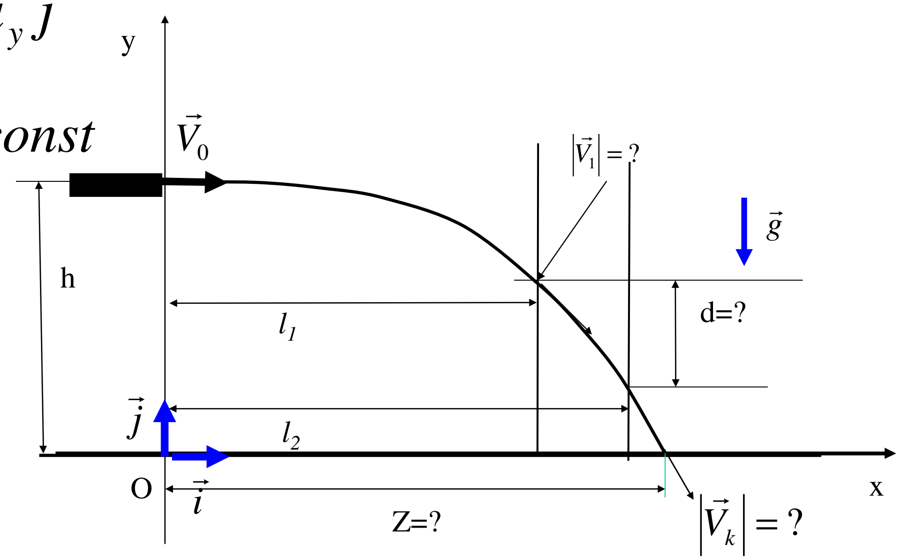
Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g. Założyć, iż w trakcie przechodzenia przez kartki prędkość kuli nie ulegała zmianie.

Dane V_0, g, h, l_1, l_2

Szukane $|\vec{V}_1|$ d, $y(x), Z, |\vec{V}_k|$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_c}{m} = \vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j} \Rightarrow \quad a_x = 0, a_y = -g = const$$



$$a_x = 0 \Rightarrow \qquad V_x(t) = V_{0x} \qquad x(t) = x_0 + V_{0x}t$$

gdzie $\quad V_{0x} = V_x(t=0) \qquad x_0 = x(t=0)$

$$a_y = const \Rightarrow \qquad V_y(t) = V_{0y} + a_y t \qquad y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

gdzie $\quad V_{0y} = V_y(t=0) \qquad y_0 = y(t=0)$

Z warunków zadania $\quad \vec{V}(t=0) = V_0\vec{i} \Rightarrow \quad V_{0x} = V_x(t=0) = V_0 \qquad V_{0y} = V_y(t=0) = 0$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = h$$

A zatem $\quad V_x(t) = V_{0x} = V_0 \qquad x(t) = V_{0x}t = V_0 t$

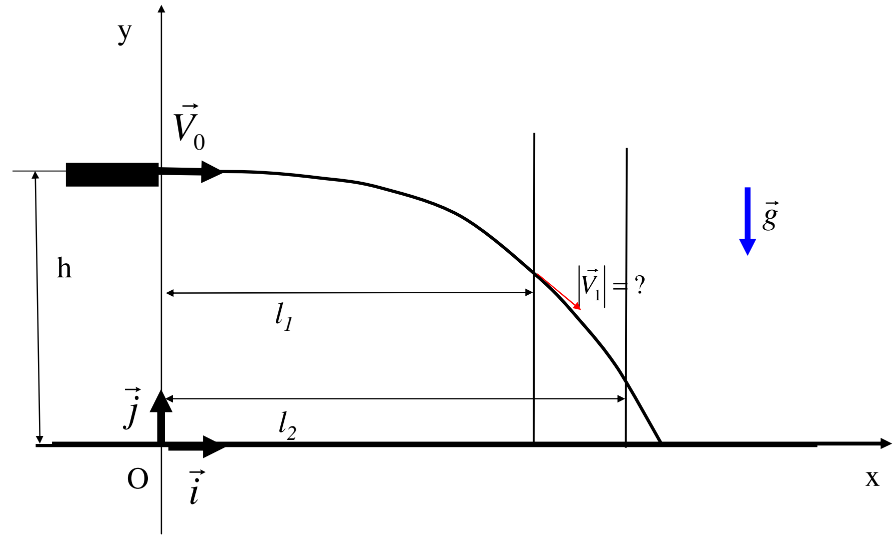
$$V_y(t) = V_{0y} + a_y t = -gt \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$V_x(t) = V_0 = const$$

$$x(t) = V_0 t$$

$$V_y(t) = -gt$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$



Określenie czasów przebicia 1 i 2 kartki odpowiednio

$$x(t = t_1) = l_1 \Rightarrow V_0 t_1 = l_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l_1}{V_0}$$

$$x(t = t_2) = l_2 \Rightarrow V_0 t_2 = l_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l_2}{V_0}$$

Składowe wektora prędkości kuli w momencie przebijania przez nią pierwszej kartki.

$$V_{1x} = V_x(t = t_1) = V_0 \qquad V_{1y} = V_y(t = t_1) = -g t_1 = -g \frac{l_1}{V_0}$$

Wartość prędkości kuli w momencie przebijania przez nią pierwszej kartki

$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{V_0^2 + \frac{g^2 l_1^2}{V_0^2}}$$

$$V_x(t) = V_0 = const$$

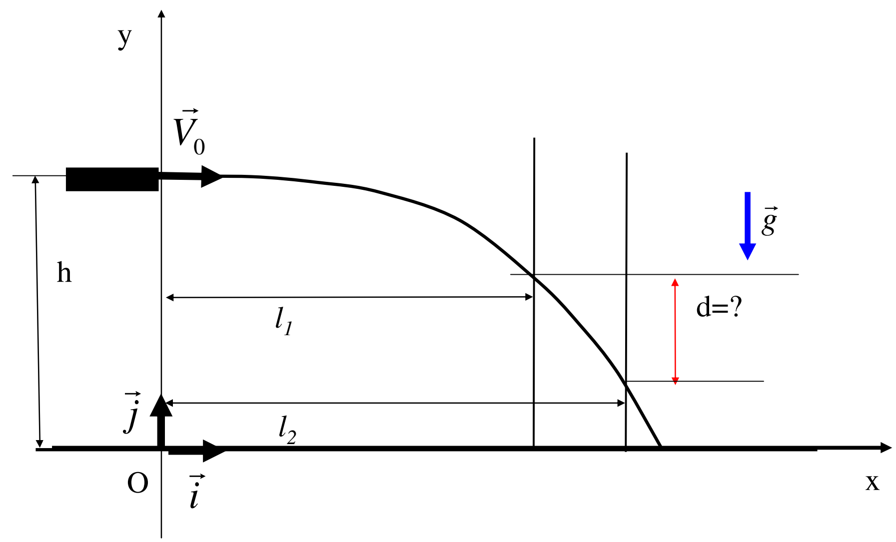
$$x(t) = V_0 t$$

$$V_y(t) = -gt$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_1 = \frac{l_1}{V_0}$$

$$t_2 = \frac{l_2}{V_0}$$



Wysokości nad ziemią na jakich znajdowała się kula w chwilach t_1 i t_2 przebijania odpowiednio 1 kartki i 2 kartki czyli wysokości na ziemią otworów w obu kartkach.

$$h_1 = y(t = t_1) = h - \frac{1}{2} g t_1^2 = h - \frac{1}{2} g \frac{l_1^2}{V_0^2}$$

$$h_2 = y(t = t_2) = h - \frac{1}{2} g t_2^2 = h - \frac{1}{2} g \frac{l_2^2}{V_0^2}$$

Różnica wysokości nad ziemią obu otworów jest równa

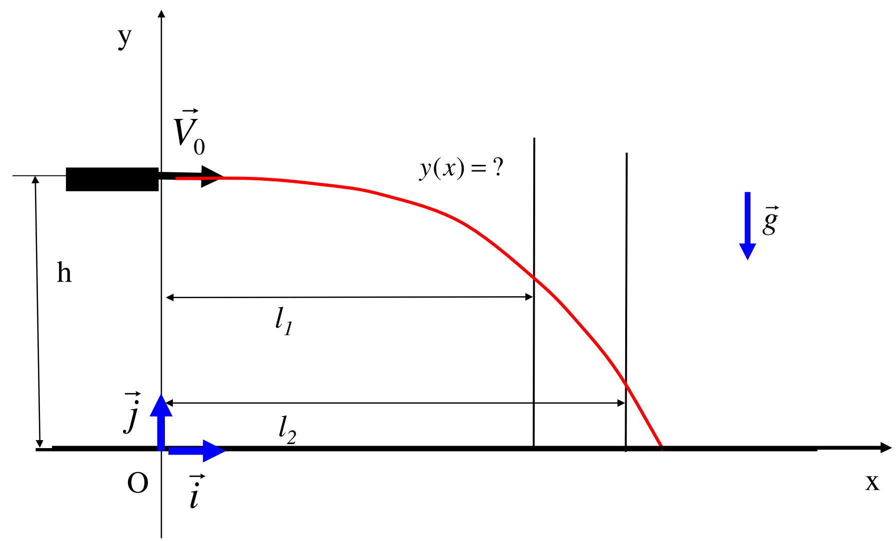
$$d = h_1 - h_2 = h - \frac{g l_1^2}{2V_0^2} - h + \frac{g l_2^2}{2V_0^2} = \frac{g}{2V_0^2}\left(l_2^2 - l_1^2\right)$$

$$V_x(t) = V_0 = const$$

$$x(t) = V_0 t$$

$$V_y(t) = -gt$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$



Poszukiwanie równania toru

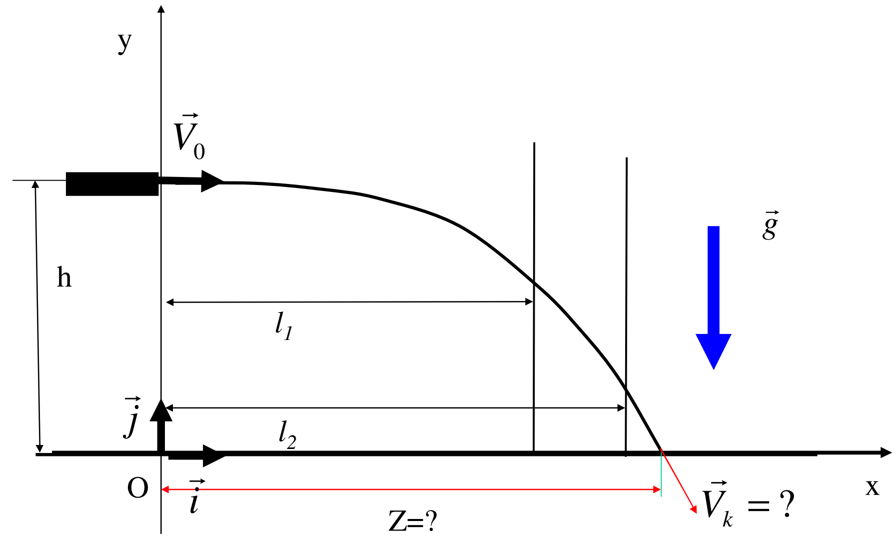
$$x(t) = V_0 t \Rightarrow \ t = \frac{x}{V_0}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \quad y(x) = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}$$

Znając równanie toru różnice wysokości nad ziemią obu otworów można określić jako

$$d = y(x = l_1) - y(x = l_2) = h - \frac{g l_1^2}{2V_0^2} - h + \frac{g l_2^2}{2V_0^2} = \frac{g}{2V_0^2}\left(l_2^2 - l_1^2\right)$$

$$V_x(t) = V_0 = const$$
$$x(t) = V_0 t$$
$$V_y(t) = -gt$$
$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$



Wyznaczenie czasu ruchu ciała

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \quad y(t = t_k) = h - \frac{1}{2} g t_k^2 = 0 \Rightarrow \quad t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Wyznaczenie zasięgu rzutu

$$x(t) = V_0 t \Rightarrow Z = x(t = t_k) = V_0 t_k = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Wyznaczenie prędkości kuli tuż przed jej spadkiem na ziemię $\quad \vec{V}_k = V_{kx}\vec{i} + V_{ky}\vec{j}$

$$V_x(t) = V_0 = const \Rightarrow V_{kx} = V_x(t = t_k) = V_0$$

$$V_y(t) = -gt \Rightarrow V_{ky} = V_y(t = t_k) = -g t_k = -\sqrt{g^2 \frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}$$

$$V_k = \left|\vec{V}_k\right| = \sqrt{V_{kx}^2 + V_{ky}^2} = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$$