

Zadanie 12b (seria V). Cząstka na ruch której nie nałożono żadnych więzów jest opisywana funkcją Hamiltona o postaci:

$$H(x, p_x, p_y, p_z) = \frac{p^2}{2m} - Fx = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - Fx$$

gdzie: F -stała, m -masa cząstki, p_x, p_y, p_z są składowymi wektora pędu, x oznacza x-ową składową wektora wodzącego cząstki.

a) Określić nawias Poissona (L_y, H) gdzie L_y -rzut momentu pędu cząstki na oś Oy.

b) Czy wielkość L_y jest stałą ruchu?

$$\text{Nawias Poissona} \quad (F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right)$$

$$f = 3, q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z, p_1 = p_x, p_2 = p_y, p_3 = p_z \Rightarrow$$

$$(L_y, H) = \frac{\partial L_y}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial L_y}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial L_y}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial L_y}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial L_y}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x)$$

$$L_y = zp_x - xp_z \Rightarrow \frac{\partial L_y}{\partial x} = -p_z, \frac{\partial L_y}{\partial p_x} = z, \frac{\partial L_y}{\partial y} = \frac{\partial L_y}{\partial p_y} = 0, \frac{\partial L_y}{\partial z} = p_x, \frac{\partial L_y}{\partial p_z} = -x, \frac{\partial L_y}{\partial t} = 0$$

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - Fx \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = -F, \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$(L_y, H) = -p_z \cdot \frac{p_x}{m} - z \cdot (-F) + 0 \cdot \frac{p_y}{m} - 0 \cdot 0 + p_x \cdot \frac{p_z}{m} - (-x) \cdot 0 = zF$$

Wiadomo iż dla dowolnej funkcji A zależnej od współrzędnych uogólnionych, pędów uogólnionych i czasu zachodzi

$$\frac{dA}{dt} = (A, H) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

A zatem gdy $A = L_y$ mamy

$$\frac{dL_y}{dt} = (L_y, H) + \frac{\partial L_y}{\partial t}$$

$$(L_y, H) = zF, \frac{\partial L_y}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dL_y}{dt} = zF \neq 0 \Rightarrow L_y \text{ nie jest stałą ruchu gdy } F \neq 0$$

Można pokazać iż dla rozważanej funkcji Hamiltona stałą ruchu byłaby składowa x-owa momentu pędu czyli L_x