

Zadanie 12a (seria I). Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej:

$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ (gdzie $f(r)$ pewna nieznana funkcja odległości ciała r od początku układu współrzędnych) po torze danym w układzie biegunowym wzorem:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)}$$

gdzie φ -kąt określający położenie ciała w biegunowym układzie współrzędnych.

- 1) Znaleźć wartość prędkości $v = |\vec{v}|$ w zależności od r .
- 2) Wyznaczyć zależność $\varphi(t)$ -kąta φ od czasu.
- 3) Wykazać, że wartość siły wywołującej ruch punktu jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły (początku układu współrzędnych) czyli zachodzi $f(r) = \frac{const}{r^3}$. Czy siła ta działa w kierunku początku układu współrzędnych czy w kierunku przeciwnym?
- 4) Znaleźć całkowitą energię ciała zakładając iż wartość energii potencjalnej w nieskończonej odległości ciała od centrum siły jest równa 0.

Znane są warunki początkowe ruchu $r(t=0) = r_0$, $\varphi(t=0) = 0$, $v(t=0) = v_0$.

Wsk. Wykorzystać fakt, że moment pędu jest stały w trakcie ruchu. Zależność wartości prędkości v od r można określić wykorzystując równanie toru $r = r(\varphi)$ oraz wzory

określające energię kinetyczną ciała: $T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]$ oraz $T = \frac{mv^2}{2}$. Brakujące

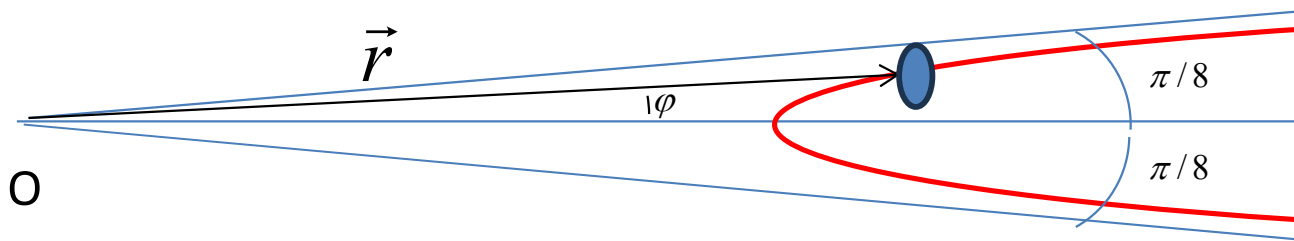
stałe można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Przy określeniu siły wykorzystać wzór Bineta.

Z treści zadania wynika iż $r = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)}$

Ruch ciała odbywa się w zakresie zmian kąta φ określonym wzorem $-\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}$ dla

którego to zakresu $\cos(4\varphi) > 0$ czyli $r > 0$ przy czym gdy $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{8}$ to $r \rightarrow \infty$

Gdy $\varphi=0$ to ciało znajduje się najmniejszej odległości od początku układu współrzędnych O równej $r=r_0$



Ruch pod wpływem siły centralnej $\Rightarrow$ moment pędu całką ruchu $\vec{L} = const$

Wyznaczenie zależności $v(r)$

W ruchu pod wpływem siły centralnej energia całkowita (będąca całką ruchu)

$$E = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] + V(r) \quad (\text{gdzie } V(r) \text{ potencjał siły centralnej}),$$

Energia kinetyczna ciała (która już nie jest stałą ruchu):

$$T = \frac{L^2}{2m} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right] \quad T = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{L^2}{m^2} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right]} = \sqrt{\frac{L^2}{m^2} \left[\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos(4\varphi)}{r_0} \right) \right]^2 + \left(\frac{\cos(4\varphi)}{r_0} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{L^2}{m^2} \left[\left[\left(\frac{-4\sin(4\varphi)}{r_0} \right) \right]^2 + \left(\frac{\cos(4\varphi)}{r_0} \right)^2 \right]} =$$

$r = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)}$

$$v(\varphi) = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \sqrt{16\sin^2(4\varphi) + \cos^2(4\varphi)} = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \sqrt{16[\sin^2(4\varphi) + \cos^2(4\varphi)] - 15\cos^2(4\varphi)} = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \sqrt{16 - 15\cos^2(4\varphi)} =$$

$$v(r) = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \sqrt{16 - 15 \frac{r_0^2}{r^2}}$$

$$r = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)} \Rightarrow \cos(4\varphi) = \frac{r_0}{r}$$

Uzależnienie L od $|\vec{v}(t=0)| = v_0$

$$v(t=0) = v_0, \quad r(t=0) = r_0 \Rightarrow v(r=r_0) = v_0$$

$$v(r) = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \sqrt{16 - 15 \frac{r_0^2}{r^2}} \Rightarrow v_0 = \frac{|\vec{L}|}{mr_0} \Rightarrow |\vec{L}| = mr_0 v_0$$

$$v(r) = v_0 \sqrt{16 - 15 \frac{r_0^2}{r^2}} \quad (\text{szybkość rośnie ze wzrostem } r)$$

Dodatkowo wyznaczono wartość momentu pędu $L = |\vec{L}| = mr_0 v_0$.

Otrzymany rezultat wiąże się z faktem iż dla chwili czasu $t=0$ wektor wodzący i prędkości tworzy ze sobą kąt $\alpha_0 = \pi/2$ i związku z tym wartość stałego w czasie momentu pędu, którą można określić także dla chwili $t=0$ ze wzoru $L = mr_0 v_0 \sin(\alpha_0)$ jest równa $L = mr_0 v_0$.

Wyznaczenie zależności $\varphi(t)$

Do określenia zależności można wykorzystać relacje:

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi}$$

(L_z składowa z-owa momentu pędu, oś Oz prostopadła do płaszczyzny w której odbywa się ruch, $L = |\vec{L}| = |L_z|$)

$$L_z = \pm |\vec{L}| = \pm mr_0 v_0$$

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \pm mr_0 v_0 = m \frac{r_0^2}{\cos^2(4\varphi)} \frac{d\varphi}{dt}$$

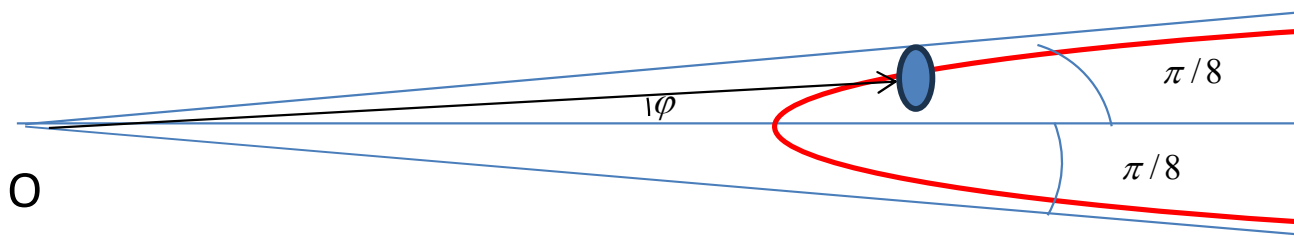
$$\pm mr_0 v_0 = m \frac{r_0^2}{\cos^2(4\varphi)} \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{\cos^2(4\varphi)} = \pm \frac{v_0}{r_0} dt \Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\cos^2(4\varphi)} = \pm \frac{v_0}{r_0} \int dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{tg}(4\varphi) = \pm \frac{v_0}{r_0} t + C$$

Ponieważ $\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\varphi(t) = \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\pm \frac{4v_0}{r_0} t\right) = \pm \frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{4v_0}{r_0} t\right)$$

Dwa możliwe znaki odzwierciedlają fakt, iż nie znamy kierunku, w jakim porusza się ciało po torze.



Określenie zależności siły centralnej od r $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$

Wykorzystamy wzór Bineta $f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$

$$r = \frac{r_0}{\cos(4\varphi)} \Rightarrow f(r) = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\cos(4\varphi)}{r_0} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{-16 \cos(4\varphi)}{r_0} + \frac{1}{r} \right] = -\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{-16}{r} + \frac{1}{r} \right] = \frac{15L^2}{mr^3}$$

$$f(r) = \frac{15mv_0^2 r_0^2}{r^3}$$

Widać iż wartość siły centralnej jest odwrotnie proporcjonalna do trzeciej potęgi odległości od centrum siły, przy czym ponieważ $f(r) > 0$, zaś $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ to siła centralna jest siłą odpychającą skierowaną od centrum siły

Określenie energii ciała w tym ruchu

Wyznaczenie energii potencjalnej

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int f(r)dr = -\int \frac{15mr_0^2 v_0^2}{r^3} dr = \frac{15mr_0^2 v_0^2}{2r^2} + C$$

$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Znajdź $V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ gdy $C=0$.

Wyznaczenie energii całkowitej będącej całką ruchu na drodze określenia jej w chwili $t=0$

$$\begin{aligned} E = \text{const} &= E(t=0) = T(t=0) + V(t=0) = \frac{m}{2} v_0^2 + V(r=r_0) \\ &= \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{15mv_0^2}{2} = 8mv_0^2 > 0 \end{aligned}$$

Dygresja: Potencjał efektywny $V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2m} + V(r) = \frac{mr_0^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{15mr_0^2 v_0^2}{2r^2} = \frac{8mr_0^2 v_0^2}{r^2} > 0$

Postać potencjału wskazuje na to iż w trakcie ruchu $r \geq r_{\min}$ dla ustalonej energii $E > 0$ bo

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r) \quad \text{i} \quad \dot{r} \geq 0$$

$$V_{ef}(r=r_0)=E \text{ bo } r_0=r_{\min} \text{ i w tym punkcie } \dot{r} = 0$$