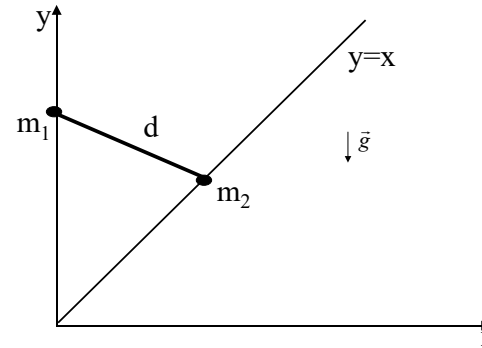




OMNIS2

Zadanie 12. (seria II)

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 znajdują się na płaszczyźnie o równaniu $z=0$ i są połączone sztywnym prętem o pomijalnie małej masie i długości d . Punkt o masie m_1 musi pozostać na prostej o równaniu $x=0$, zaś punkt o masie m_2 na prostej o równaniu $y=x$ (rysunek obok). Na punkty działa siła ciężkości skierowana pionowo w dół. Znaleźć położenie równowagi punktów wykorzystując zasadę prac wirtualnych (zasadę Lagrange'a).



Zasada Lagrange'a (prac wirtualnych) dla układu złożonego z n punktów materialnych

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{sumowanie po punktach materialnych})$$

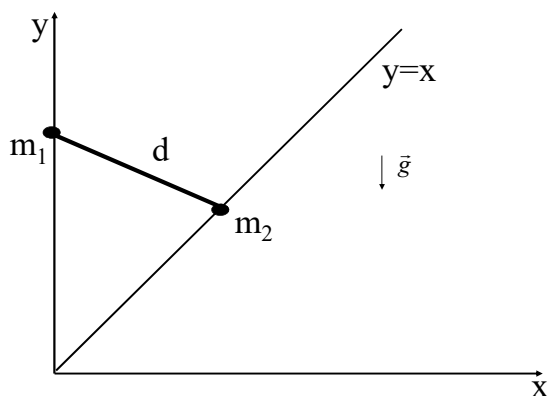
$$\sum_{i=1}^{i_{\vec{n}}} \text{grad}_i f_k \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad k=1, \dots, p; \quad p \text{ -liczba więzów}$$

$$f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 0 \quad \text{równanie k więzu} \quad k=1, \dots, p; \quad p \text{ -liczba więzów}$$

Jest warunkiem dostatecznym na wyznaczenie położenia równowagi gdy więzy i siły działające w układzie nie zależą jawnie od czasu



Analiza w przestrzeni dwuwymiarowej w dwuwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych



Równania więzów:

$$f_1 = x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0$$

$$f_3 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - d^2 = 0$$

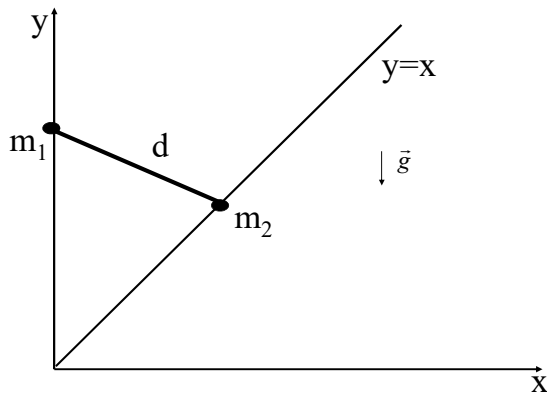
Warunki na składowe wektorów przesunięć wirtualnych punktów materialnych $\delta\vec{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i)$

$$\sum_{i=1}^{n=2} \text{grad}_i f_k \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_k}{\partial y_2} \delta y_2 = 0 \quad \text{grad}_i f_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \right)$$

$$\delta x_1 = 0 \quad k=1$$

$$-\delta x_2 + \delta y_2 = 0 \quad k=2$$

$$2(x_2 - x_1)(-\delta x_1 + \delta x_2) + 2(y_2 - y_1)(-\delta y_1 + \delta y_2) = 0 \quad k=3$$



Siła działająca na i-ty punkt materialny ($i=1,2$):

$$\vec{F}_i = (0, -m_i g) \Rightarrow F_{ix} = 0, F_{iy} = -m_i g$$

Równanie wyrażające zerowanie się sumy prac wszystkich sił na przesunięciach wirtualnych

$$\sum_{i=1}^{n=2} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Rightarrow F_{1x} \delta x_1 + F_{1y} \delta y_1 + F_{2x} \delta x_2 + F_{2y} \delta y_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m_1 g \delta y_1 - m_2 g \delta y_2 = 0$$

Ponieważ mamy 3 równania więzów to tylko jedną składową wektorów przesunięć wirtualnych możemy uznać za wielkość dowolną.

Z warunków zadania wynika iż za składową taką można przyjąć np. δy_2

i spróbujemy pozostałe składowe wyznaczyć lub uzależnić od δy_2

W szczególności uzależnimy δy_1 od δy_2

$$\delta x_1 = 0$$

$$\delta y_2 - \delta x_2 = 0 \Rightarrow \delta x_2 = \delta y_2$$

$$2(x_2 - x_1)(-\delta x_1 + \delta x_2) + 2(y_2 - y_1)(-\delta y_1 + \delta y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x_2 - x_1)\delta y_2 + 2(y_2 - y_1)(-\delta y_1 + \delta y_2) = 0 \Rightarrow \delta y_1 = \frac{y_2 - y_1 + x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \delta y_2$$

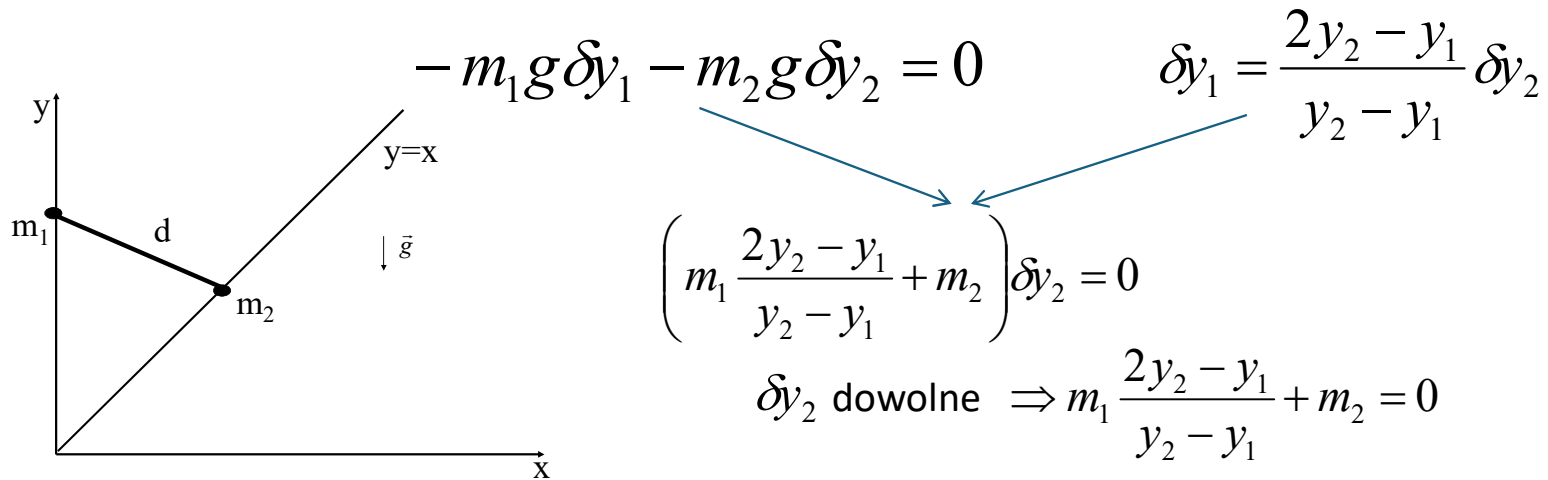
Zał. $y_2 \neq y_1$ (można niezależnie pokazać iż położeniu równowagi nie może odpowiadać punkt dla którego $y_2 = y_1$)

Uproszczenie otrzymanej relacji w oparciu o równania więzów

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1 + x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \delta y_2 \Rightarrow \delta y_1 = \frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1} \delta y_2$$

$$f_1 = x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$$



$$m_1 \frac{2y_2 - y_1}{y_2 - y_1} + m_2 = 0 \Rightarrow m_1(2y_2 - y_1) + m_2(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$y_2(2m_1 + m_2) - y_1(m_1 + m_2) = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} y_2$$

W położeniu równowagi relacja powyższa musi być spełniona obok równań więzów

$$f_3 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - d^2 = 0 \Rightarrow (y_2 - y_1)^2 + y_2^2 = d^2$$

$$f_1 = x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$f_2 = y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$$

$$y_1 = \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} y_2 \quad (y_2 - y_1)^2 + y_2^2 = d^2$$

$$\left(1 - \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 y_2^2 + y_2^2 = d^2 \Rightarrow \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 y_2^2 + y_2^2 = d^2 \Rightarrow \frac{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} y_2^2 = d^2 \Rightarrow$$

$$y_2 = \pm \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d$$

$$y_1 = \frac{(2m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} y_2 = \pm \frac{2m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d$$

$$x_2 = y_2 = \pm \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1^2 + (m_1 + m_2)^2}} d$$

$$x_1 = 0$$