Zad. 11 (seria VI). Przeprowadzono sprężanie gazu doskonałego raz izotermicznie, a drugi raz adiabatycznie. Początkowe temperatury i ciśnienia gazu były jednakowe w obu przypadkach. Końcowe ciśnienia w obu przypadkach były 2 razy większe niż początkowe. Znaleźć stosunek prac przy adiabatycznym i izotermicznym sprężaniu. Wiadomo, iż stosunek ciepła molowego przy stałym ciśnieniu do ciepła molowego przy stałej objętości jest równy κ.

Dane: $p_k/p_p=2, \kappa$

Szukane: W_{ad}/W_{iz}

Praca wykonana przez siły zewnętrzne nad układem gazowym przy zmianie jego objętości od V_p do V_k

$$W = -\int_{V_p}^{V_k} p dV$$

Skorzystanie z tego wzoru wymaga znajomości postaci zależności ciśnienia od objętości w trakcie trwania procesu

$$\frac{pV}{T} = nR \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$$

a) Przemiana izotermiczna

$$T = const = T_p \Rightarrow p = \frac{nRT_p}{V} = \frac{const}{V} = p(V)$$

$$W_{iz} = -\int_{V_p}^{V_k} \frac{nRT_p}{V} dV = -nRT_p \int_{V_p}^{V_k} \frac{1}{V} dV = -nRT_p \ln(V)\Big|_{V_p}^{V_k} = -nRT_p \left[\ln(V_k) - \ln(V_p)\right] = -nRT_p \ln\left(\frac{V_k}{V_p}\right)$$

$$W_{iz} = -nRT_p \ln\left(\frac{V_k}{V_p}\right)$$

$$\frac{pV}{T} = nR, \qquad T = const \Rightarrow \qquad pV = const \Rightarrow \; p_p V_p = p_k V_k \Rightarrow$$

$$\frac{V_k}{V_p} = \frac{p_p}{p_k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \; W_{iz} = -nRT_p \ln\left(\frac{V_k}{V_p}\right) = -nRT_p \ln\left(\frac{1}{2}\right) = nRT_p \ln 2$$

b) Przemiana adiabatyczna

Układ nie wymienia ciepła z otoczeniem $\Rightarrow Q = 0$

Z I zasady termodynamiki $\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U_{ad} = W_{ad}$

W dowolnej przemianie gazu doskonałego prowadzącej do wzrostu temperatury o gdy C_V=const mamy (C_V-ciepło molowe przy stałej objętości)

$$\Delta U = nC_v \Delta T$$

$$W_{ad} = \Delta U = nC_V\left(T_k - T_p\right)$$

$$W_{ad} = \Delta U = nC_V\left(T_k - T_p\right)$$

W przemianie adiabatycznej quasi-statycznej

$$p_p V_p^{\kappa} = p_k V_k^{\kappa} \qquad \text{gdzie} \qquad \kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow V_p = \frac{nRT_p}{p_p} \quad V_k = \frac{nRT_k}{p_k} \Rightarrow \quad p_p\left(\frac{nRT_p}{p_p}\right)^{\kappa} = p_k\left(\frac{nRT_k}{p_k}\right)^{\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_p^{1-\kappa}T_p^{\kappa} = p_k^{1-\kappa}T_k^{\kappa} \Rightarrow T_k^{\kappa} = T_p^{\kappa}\left(\frac{p_p}{p_k}\right)^{1-\kappa} \Rightarrow \quad T_k = T_p\left(\frac{p_p}{p_k}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \quad T_p\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_p 2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\frac{p_p}{p_k} = \frac{1}{2}$$

$$W_{ad} = nC_V\left(T_k - T_p\right) = nC_V T_p\left(2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right)$$

$$W_{iz} = nRT_p \ln 2 \qquad W_{ad} = nC_V T_p \left(2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)$$

$$\frac{W_{ad}}{W_{iz}} = \frac{nC_V T_p \left(2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)}{nRT_p \ln 2} = \frac{C_V \left(2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)}{R \ln 2}$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}, \quad R = C_p - C_V \Rightarrow \qquad \frac{C_V}{R} = \frac{C_V}{C_p - C_V} = \frac{1}{\frac{C_p}{C_V} - 1} = \frac{1}{\kappa - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{W_{ad}}{W_{iz}} = \frac{C_V \left(2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)}{R \ln 2} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot \frac{2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\ln 2}$$