

Zad. 11 (seria VI). Kula o masie m_1 i szybkości V_{1p} zderza się sprężysto niecentralnie z inną kulą znajdującą się w spoczynku o masie $m_2 = 3m_1$. Po zderzeniu kula o masie m_2 porusza się pod kątem $\varphi < \frac{\pi}{2}$ względem pierwotnego kierunku ruchu kuli o masie m_1 . Znaleźć szybkości V_{1k} oraz V_{2k} obu kul po zderzeniu.

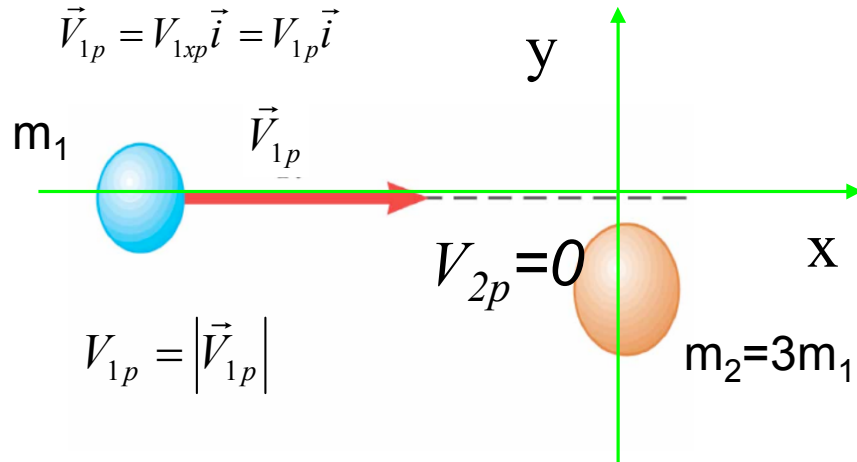
Dane: $m_2/m_1=3$, V_{1p} , φ

Szukane: V_{1k} , V_{2k}

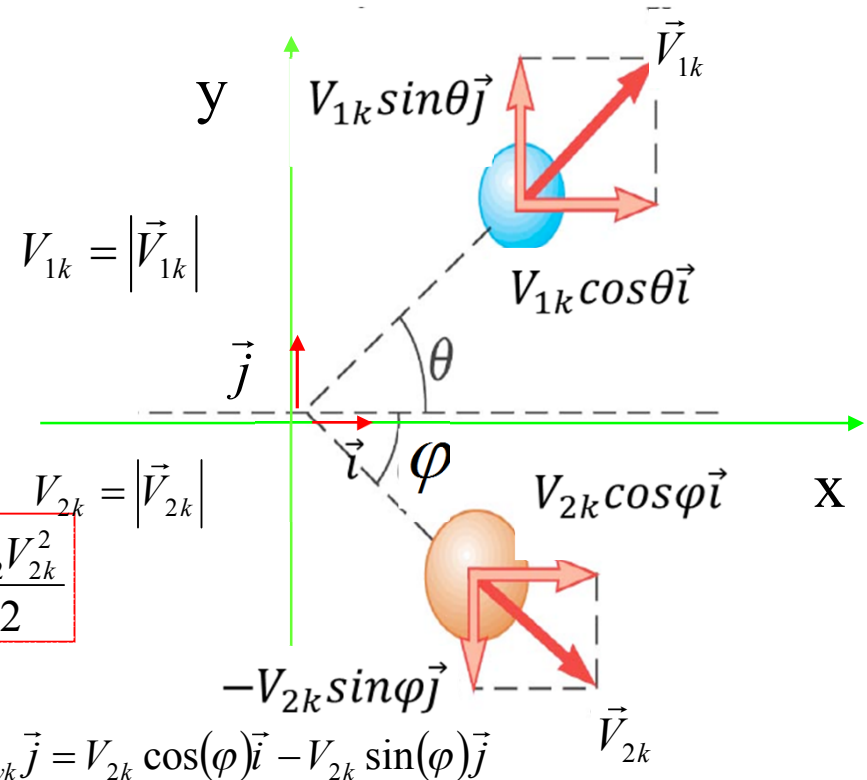
Zderzenie sprężyste (niecentralne)

Przed zderzeniem

Po zderzeniu



$$\vec{V}_{1k} = V_{1xk} \vec{i} + V_{1yk} \vec{j} = V_{1k} \cos(\theta) \vec{i} + V_{1k} \sin(\theta) \vec{j}$$



Zasada zachowania energii

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2} \Rightarrow \frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2}$$

Zasada zachowania pędu

$$\vec{V}_{2k} = V_{2xk} \vec{i} + V_{2yk} \vec{j} = V_{2k} \cos(\phi) \vec{i} - V_{2k} \sin(\phi) \vec{j}$$

$$m_1 V_{1xp} + m_2 V_{2xp} = m_1 V_{1xk} + m_2 V_{2xk} \Rightarrow m_1 V_{1p} = m_1 V_{1k} \cos(\theta) + m_2 V_{2k} \cos(\phi) \quad \text{Składowa x pędu}$$

$$m_1 V_{1yp} + m_2 V_{2yp} = m_1 V_{1yk} + m_2 V_{2yk} \Rightarrow 0 = m_1 V_{1k} \sin(\theta) - m_2 V_{2k} \sin(\phi) \quad \text{Składowa y pędu}$$

Do określenia ruchu układu po zderzeniu trzeba znać oprócz prędkości V_{1p} jedną z 4 wielkości: V_{1k} , V_{2k} , θ , ϕ opisujących ruch obu ciał po zderzeniu.
W zadaniu jest nią kąt ϕ .

Ponieważ $m_2=3m_1$ to równania zapisane upraszczają się

$$\frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2k}^2}{2} \Rightarrow \frac{m_1 V_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1k}^2}{2} + \frac{3m_1 V_{2k}^2}{2} \Rightarrow V_{1p}^2 = V_{1k}^2 + 3V_{2k}^2 \quad (1)$$

$$m_1 V_{1p} = m_1 V_{1k} \cos(\theta) + m_2 V_{2k} \cos(\varphi) \Rightarrow V_{1p} = V_{1k} \cos(\theta) + 3V_{2k} \cos(\varphi) \quad (2)$$

$$0 = m_1 V_{1k} \sin(\theta) - m_2 V_{2k} \sin(\varphi) \Rightarrow 0 = V_{1k} \sin(\theta) - 3V_{2k} \sin(\varphi) \quad (3)$$

$$\text{Z (2)} \quad \cos(\theta) = \frac{V_{1p} - 3V_{2k} \cos(\varphi)}{V_{1k}} \quad \text{Z (3)} \quad \sin(\theta) = \frac{3V_{2k} \sin(\varphi)}{V_{1k}}$$


$$1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k} \cos(\varphi) + 9V_{2k}^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}{V_{1k}^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k} \cos(\varphi) + 9V_{2k}^2$$

$$\text{Z (1)} \quad V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 \quad \longrightarrow \quad V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k} \cos(\varphi) + 9V_{2k}^2$$


$$V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 - 6V_{1p}V_{2k}\cos(\varphi) + 9V_{2k}^2 \Rightarrow$$

$$-6V_{1p}V_{2k}\cos(\varphi) + 12V_{2k}^2 = 0 \Rightarrow V_{2k} = \frac{1}{2}V_{1p}\cos(\varphi)$$

$$V_{1k}^2 = V_{1p}^2 - 3V_{2k}^2 = V_{1p}^2 \left(1 - \frac{3}{4}\cos^2(\varphi) \right) = \frac{V_{1p}^2}{4} (4 - 3\cos^2(\varphi))$$

$$V_{1k} = \frac{V_{1p}}{2} \sqrt{4 - 3\cos^2(\varphi)}$$