

Zad. 11 (seria IV). Na szpulkę nawinięto nierozciągliwą nić, której koniec przyczepiono do sufitu. Szpulka pod wpływem swego ciężaru odwija się z nici. Masa szpulki jest równa m , jej moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek szpulki wynosi I_0 , zaś promień szpulki R . Założyć, iż promień szpulki jest znacznie mniejszy od długości nici, tak, iż nić łączącą szpulkę z sufitem można uważać za pionową. Znana jest wartość przyspieszenia ziemskiego g .

1) Obliczyć:

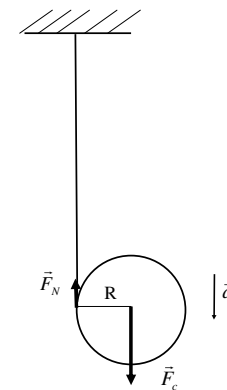
a) wartość przyspieszenia a , z jakim opada środek masy szpulki

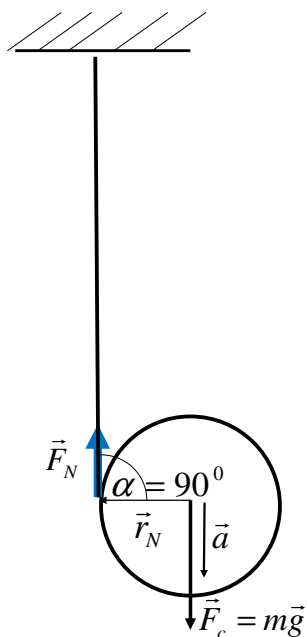
b) wartość siły naciągu nici F_N .

2) Zakładając iż w chwili początkowej szpulka się nie poruszała określić wartość prędkości środka masy szpulki oraz wartość prędkości kątowej ruchu obrotowego szpulki wokół osi obrotu przechodzącej przez środek masy szpulki w chwili gdy jej środek przebył drogę o długości h . Sprawdzić, iż całkowita energia szpulki równa sumie energii potencjalnej oraz kinetycznej ruchu postępowego i obrotowego szpulki jest zachowana w trakcie jej ruchu.

Dane m, I_0, R, g, h

Szukane a, F_N, V_h, ω_h





Opis ruchu postępowego środka masy szpulki

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{wyp}} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}_C + \vec{F}_N \Rightarrow ma = F_c - F_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma = mg - F_N$$

$\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}, \vec{\tau}_N, \text{os } Oz, \vec{k}$



Wartość siły naciągu nici

Wartość przyspieszenia
środku masy

Opis ruchu obrotowego szpulki

Moment siły naciągu nici określony względem środka masy szpulki

$$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{F}_N = |\vec{\tau}_N| \vec{k} \quad \vec{k} \text{ -wersor określający zwrot osi } Oz$$

(skierowany wzdłuż osi Oz o wartości $|\vec{\tau}_N| = |\vec{r}_N| |\vec{F}_N| \sin\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = RF_N$)

Moment siły ciężkości określony względem środka masy szpulki

$$\vec{\tau}_c = \vec{r}_c \times \vec{F}_c = 0 \quad \text{bo } \vec{r}_c = 0 \quad \text{siła ciężkości przyłożona do środka masy szpulki}$$

$$\text{Wypadkowy moment siły} \quad \vec{\tau}_w = \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_c = \vec{\tau}_N = |\vec{\tau}_N| \vec{k}$$

Rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu Oz przechodząca przez środek masy szpulki (dokładniej składowa z-owa momentu siły przy przyjęciu iż oś Oz ma taki kierunek i zwrot jak wektor $\vec{\tau}_w$)

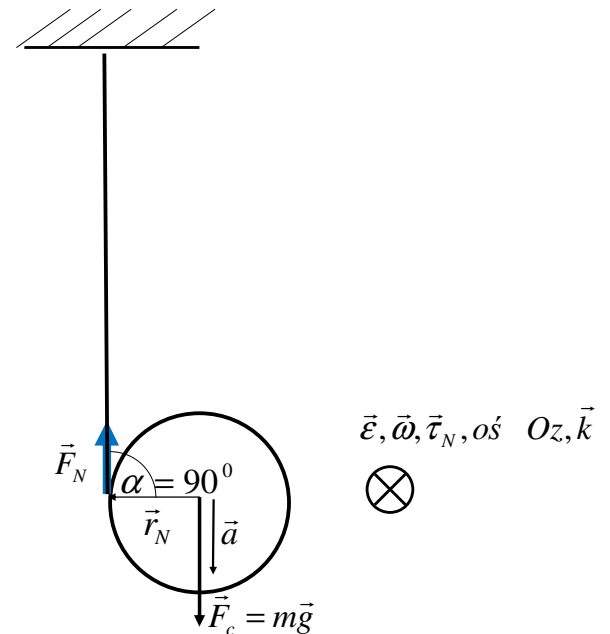
$$\vec{\tau}_w = |\vec{\tau}_N| \vec{k} \Rightarrow \tau_{wz} = |\vec{\tau}_N| = RF_N$$

Wektor przyspieszenia kąowego

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{k} \Rightarrow \varepsilon_z = \varepsilon = |\vec{\varepsilon}|$$

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$I \varepsilon_z = \tau_{wz} \Rightarrow I_0 \varepsilon = RF_N$$



Powiązanie przyspieszenia kąowego z przyspieszeniem środka masy

$$|\vec{\varepsilon}| = \frac{|\vec{a}_{sm}|}{R} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{R}$$

Rozwiązanie układu równań w celu wyznaczenia a i F_N

$$ma = mg - F_N \longrightarrow ma = mg - \frac{I_0 a}{R^2}$$

$$I_0 \varepsilon = RF_N \Rightarrow F_N = \frac{I_0 \varepsilon}{R} \Rightarrow F_N = \frac{I_0 a}{R^2}$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$ma = mg - \frac{I_0 a}{R^2} \Rightarrow a \left(m + \frac{I_0}{R^2} \right) = mg \Rightarrow$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I_0}{R^2}} = \frac{mR^2}{mR^2 + I_0} g$$

$$F_N = \frac{I_0 a}{R^2} = \frac{I_0}{I_0 + mR^2} mg$$

Wyznaczenie prędkości kątowej ω_h i szybkości środka masy V_h szpulki po pokonaniu przez środek masy drogi równej h .

$a = \text{const} \Rightarrow$ ruch środka masy jednostajnie przyspieszony

$$V(t=0)=0 \Rightarrow \quad V(t) = at \quad S(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$S(t = t_h) = a \frac{t_h^2}{2} = h \Rightarrow t_h = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$a = \frac{mR^2}{mR^2 + I_0} g$$

$$V_h = V(t = t_h) = at_h = a \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2ha^2}{a}} = \sqrt{2ha} = \sqrt{\frac{2hmgR^2}{mR^2 + I_0}}$$

$$\omega_h = \omega(t = t_h) = \frac{V_h}{R} = \sqrt{\frac{2hmg}{mR^2 + I_0}}$$

Określenie zmiany energii kinetycznej szpulki w trakcie przybycia przez środek masy szpulki drogi h

$$\Delta E_{kin} = E_{kin,konc} - E_{kin,pocz} = E_{kin,konc} = E_{kin,konc,post} + E_{kin,konc,obr} = \frac{mV_h^2}{2} + \frac{I_0\omega_h^2}{2} \Rightarrow$$

Spoczynek w chwili początkowej

$$\omega_h = \sqrt{\frac{2hmg}{mR^2 + I_0}} \quad V_h = \sqrt{\frac{2hmgR^2}{mR^2 + I_0}}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{hm^2gR^2}{mR^2 + I_0} + \frac{I_0hmg}{mR^2 + I_0} = \frac{hmg(mR^2 + I_0)}{mR^2 + I_0} = hmg$$

Określenie zmiany energii potencjalnej szpulki w trakcie przybycia przez środek masy szpulki drogi h

$$\Delta E_{pot} = E_{pot,konc} - E_{pot,pocz} = -mgh$$

Zmiana energii mechanicznej

$$\Delta E = \Delta E_{kin} + E_{pot} = mgh - mgh = 0 \Rightarrow \text{Energia nie uległa zmianie}$$