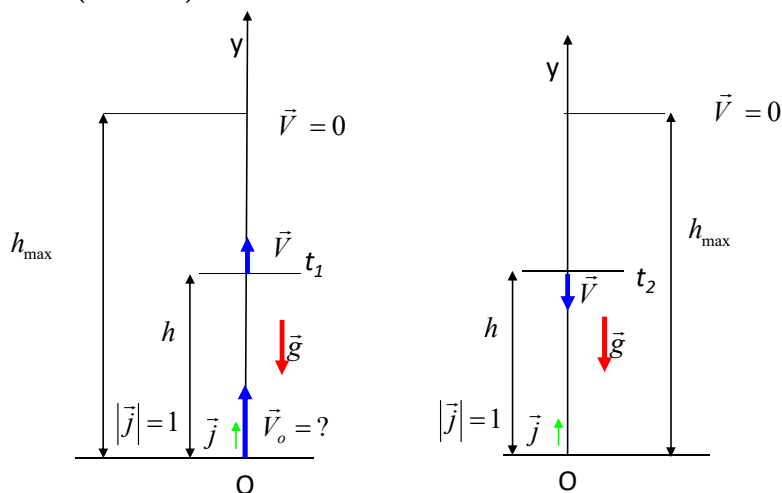


Zad. 11 (seria II) .



Ponieważ na ciało nie działa inna siła niż siła ciężkości to wektor przyspieszenia ciała jest równy wektorowi przyspieszenia ziemskiego $\vec{a} = \vec{g}$ skierowanego pionowo do dołu .

Ruch ciała można opisać w jednowymiarowym układzie współrzędnych z osią Oy skierowaną pionowo do góry i początkiem układu O umieszczonym w miejscu wyrzutu ciała.

W przyjętym układzie współrzędnych wektor przyspieszenia $\vec{a}$ można zapisać wzorem

$$\vec{a} = a_y \vec{j} = -g \vec{j}$$

gdzie $g = |\vec{g}|$

Ujemny znak jedynej niezerowej y-owej składowej wektora przyspieszenia ciała $a_y = -g$ wynika z faktu iż wektor przyspieszenia ziemskiego ma przeciwny zwrot niż oś Oy i wersor $\vec{j}$ określający zwrot tej osi.

W przyjętym układzie współrzędnych wektor prędkości $\vec{V}$ i wodzący $\vec{r}$ można zapisać wzorami

$$\vec{V} = V_y \vec{j}$$

$$\vec{r} = y \vec{j}$$

Ponieważ $a_y = -g = \text{const}$ jest stałe w czasie to ruch rozważany jest jednostajnie zmienny i zależność V_y oraz y od czasu opisują wzory

$$V_y = V_{0y} + a_y t = V_{0y} - gt \quad (*)$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (**)$$

gdzie $y_0 = y(t=0)$ oraz $V_{0y} = V_y(t=0)$

W trakcie analizowanego ruchu znak jedynej różnej od zera składowej y-kowej prędkości ciała czyli V_y ulega zmianie na przeciwny. Do czasu osiągnięcia najwyższej wysokości nad ziemią czyli podczas wznoszenia ciała znak ten jest dodatni $V_y > 0$, zaś potem czyli podczas powrotu ciała na ziemię V_y ma znak ujemny czyli $V_y < 0$. Wynika to z tego iż podczas wznoszenia ciało ma prędkość skierowaną w tym samym kierunku co oś Oy i wersor $\vec{j}$ czyli wektor prędkości $\vec{V}$ ma zwrot przeciwny do wektora przyspieszenia $\vec{a}$. Ciało podczas wznoszenia porusza się zatem ruchem jednostajnie opóźnionym. Z kolei podczas opadania ciała oba wektory $\vec{V}$ oraz $\vec{a}$ mają ten sam zwrot i jest on przeciwny do zwrotu wersora $\vec{j}$ oraz osi Oy. Ciało podczas opadania porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Podczas całego ruchu od chwili wyrzutu ciała do jego powrotu na ziemię obowiązują wzory (*) i (**)

Z warunków początkowych zadania wynika iż

$$y_0 = y(t=0) = 0, \text{ (początek układu współrzędnych obieramy w miejscu wyrzutu ciała)}$$

Ponadto w chwili wyrzutu ciała wektor prędkości ma ten sam zwrot co wersor $\vec{j}$ czyli $V_{0y} = V_y(t=0) > 0$

i zachodzi

$$V_{0y} = |\vec{V}(t=0)| = V_0,$$

Wielkość V_{0y} jest więc równa szukanej wartości prędkości (szybkości) jaką nadano ciału w trakcie wyrzutu

Uwzględniając to podczas ruchu ciała zachodzą relację

$$V_y(t) = V_0 - gt$$

$$y(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Wielkość y określa wysokość ciała nad ziemią. Na wysokości h mniejszej od maksymalnej wysokość nad ziemią, ciało znajdować się będzie dwukrotnie po czasach mierzonych od chwili wyrzutu ciała oznaczonych tutaj przez t_1 oraz t_2 . Po czasie t_1 ciało znajdzie się na tej wysokości poruszając się do góry, a po czasie t_2 poruszając się do dołu.

Z treści zadania wynika iż

$$t_2 - t_1 = \Delta t \quad (***)$$

$$y(t = t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = h$$

$$y(t = t_2) = V_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = h$$

Ogólnie czasy t_1 oraz t_2 można wyznaczyć rozwiązując wynikające z powyższych równań równanie kwadratowe

$$V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = h \Rightarrow \frac{1}{2} g t^2 - V_0 t + h = 0$$

którego pierwiastki są równe

$$t_1 = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}, \quad t_2 = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$$

Uwzględniając powyższy wynik w relacji (***) otrzymujemy iż

$$t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g} = \Delta t$$

Skąd wynika iż

$$\sqrt{V_0^2 - 2gh} = \frac{g\Delta t}{2}$$

czyli

$$V_0 = \sqrt{2gh + \left(\frac{g\Delta t}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2m + \left(\frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 2s}{2}\right)^2} = \sqrt{39,24 \frac{m^2}{s^2} + 96,24 \frac{m^2}{s^2}} = 11,6 \frac{m}{s}$$