



OMNIS2

Otwartość. Modernizacja. Nowoczesność. Integracja. Społeczność.

Formalizm kanoniczny-cz. 3

- Przekształcenia kanoniczne
- Równania Hamiltona-Jacobiego



Przekształcenia kanoniczne

Transformacje (przekształcenia) punktowe

Rozważamy dowolną transformację współrzędnych uogólnionych, zgodnych z więzami

$$q_l = q_l(Q, t), \quad l = 1, 2, \dots, f, \quad \text{gdzie} \quad Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_f),$$

$$|\partial q_k / \partial Q_l| \neq 0 \Rightarrow \text{istnieje transf. odwrotna} \quad Q_l = Q_l(q, t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są niezmiennicze względem zamiany współrzędnych uogólnionych

W nowych zmiennych (Q, P, t)

W starych zmiennych (q, p, t)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0,$$

$$\text{gdzie} \quad L = L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_l} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_l} = 0$$

$$\text{gdzie} \quad \bar{L} = \bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t),$$

$$\dot{q}_l = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}(Q, t) \dot{Q}_k + \frac{\partial q_l}{\partial t}(Q, t), \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Transformacja punktowa współrzędnych uogólnionych określa sposób, w jaki transformują się prędkości i pędy uogólnione

$$P_l = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \left(\Rightarrow p_l = \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \right)$$

Jeżeli współrzędne i pędy poddamy powyższej transformacji zwanej rozszerzoną transformacją punktową to również ogólna postać równań Hamiltona nie ulegnie zmianie czyli

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial P_l} \quad \dot{P}_l = - \frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial Q_l} \quad \text{gdzie} \quad \bar{H} = \sum_{l=1}^f P_l \dot{Q}_l(Q, P, t) - \bar{L}(Q, \dot{Q}(Q, P, t), t)$$

Przekształcenia kanoniczne

Transformacje współrzędnych i pędów

$$q_l \rightarrow Q_l = Q_l(q, p, t), \quad p_l \rightarrow P_l = P_l(q, p, t) \quad l = 1, \dots, f$$

nazywamy kanoniczną gdy w starych (q, p, t) i nowych (Q, P, t) zmiennych równania Hamiltona mają taką samą ogólną postać

$$\begin{aligned} \dot{q}_l &= \frac{\partial H}{\partial p_l}, & H &= H(q, p, t) \Rightarrow & \dot{Q}_l &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_l}, & \bar{H} &= \bar{H}(Q, P, t) \\ \dot{p}_l &= -\frac{\partial H}{\partial q_l} & & & \dot{P}_l &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_l} \end{aligned}$$

Do przekształceń kanonicznych zaliczamy nie tylko rozszerz. przekształcenia punktowe (praktyczny sposób sprawdzenia kanoniczności przekształcenia podany na następnym slajdzie)

W ogólnym przypadku $H(q, p, t)$ oraz $\bar{H}(Q, P, t)$ połączone są pewnym przekształceniem, którego postać zależy od funkcji tworzącej przekształcenia.

W przypadku gdy przekształcenie kanoniczne nie zależy jawnie od czasu

$$q_l \rightarrow Q_l = Q_l(q, p), \quad p_l \rightarrow P_l = P_l(q, p) \quad l = 1, \dots, f$$

to możemy przyjąć $\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t)$

Do znalezienia funkcji $\bar{H}(Q, P, t)$ wykorzystujemy postać transformacji odwrotnej

która istnieje gdy

$$\frac{D(Q_1, \dots, P_f)}{D(q_1, \dots, p_f)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial p_f} \\ \frac{\partial P_f}{\partial q_1} & \frac{\partial P_f}{\partial p_f} \end{vmatrix} \neq 0$$

Warunek dostateczny kanoniczności przekształcenia (dowód w dodatku 1)

Przekształcenie jest kanoniczne gdy można znaleźć co najmniej jedną spośród funkcji spełniających relacje $F_1 = W(q, Q, t)$, $F_2 = S(q, P, t)$, $F_3(Q, p, t)$, $F_4(p, P, t)$

$$p_l = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_l}, \quad (1) \quad p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l} \quad (2)$$

$$q_l = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_l}, \quad P_l = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_l} \quad (3) \quad q_l = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_l}, \quad Q_l = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_l} \quad (4)$$

Transformacje dla której spełniony jest powyższy warunek nazywamy uniwalencyjną transformacją kanoniczną, same zaś funkcje $F_1 = W(q, Q, t)$, $F_2 = S(q, P, t)$, $F_3(Q, p, t)$, $F_4(p, P, t)$ **zależne od** f **starych zmiennych i** f **nowych zmiennych i czasu nazywamy funkcjami tworzącymi transformacji kanonicznej**

Funkcja tworząca dla transformacji kanonicznej tożsamościowej

$$S = \sum_{k=1}^f P_k q_k \quad \text{gdyż zachodzą relacje :}$$

$$Q_l = q_l \quad P_l = p_l$$

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l} = P_l, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l} = q_l,$$

Funkcja tworząca dla rozszerzonej transformacji punktowej

$$S(q, P, t) = \sum_{l=1}^f P_l Q_l(q, t) = \sum_{k=1}^f P_k Q_k(q, t) \quad \text{gdyż zachodzą relacje :}$$

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l} = Q_l(q, t),$$

$$Q_l = Q_l(q, t), \quad P_l = \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}$$

$$\left(\Rightarrow p_l = \sum_{k=1}^f P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \right)$$

Funkcja tworząca dla transformacji kanonicznej danej poniższymi wzorami

$$Q_l = p_l \quad P_l = -q_l$$

Powyższa transformacja nie będąca rozszerzoną transformacją punktową jest kanoniczna, z funkcją tworzącą

$$W(q, Q) = \sum_{l=1}^f q_l Q_l$$

gdyż zachodzą relacje :

$$p_l = \frac{\partial W}{\partial q_l} = Q_l, \quad P_l = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_l} = -q_l$$

Nie dla wszystkich transformacji kanonicznych można znaleźć wszystkie funkcje tworzące, np. dla transformacji powyższej nie można znaleźć funkcji $S(q, P, t)$, a dla rozszerzonej transformacji punktowej (w tym transformacji tożsamościowej) funkcji $W(q, Q, t)$.

Wyznaczenie funkcji Hamiltona po przekształceniu kanonicznym uniwalencyjnym zależnym od czasu

$$\bar{H}(Q, P, t) = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \quad (5)$$

przy czym we wzorze ostatecznym należy otrzymany wynik uzależnić od zmiennych Q, P, t wykorzystując postać transformacji kanonicznych i transformacji do nich odwrotnych

Gdy przekształcenie kanoniczne nie zależy od czasu to można znaleźć funkcje tworzącą F niezależną od czasu i wówczas

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t)$$

Własności przekształceń kanonicznych

Przekształcenia kanoniczne tworzą grupę przekształceń w przestrzeni fazowej, tzn.

- **Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem kanonicznym**
- **Superpozycja dwóch przekształceń kanonicznych jest przekształceniem kanonicznym**
- **Transformacja odwrotna do przekształcenia kanonicznego jest przekształceniem kanonicznym**

(wniosek dodatkowy, pokazanie kanoniczności przekształcenia odwrotnego do danego dowodzi kanoniczności analizowanego przekształcenia)

Każde dwa zespoły zmiennych kanonicznych, opisujące dwa stany, które układ przyjmuje podczas swego ruchu, są powiązane przekształceniem kanonicznym (czyli ruch układu w przestrzeni fazowej można uważać za pewne przekształcenie kanoniczne)

Nawiasy Poissona są niezmiennikami uniwalencyjnych przekształceń kanonicznych (dowód dodatek 2)

$$(F, G) = (F, G)'$$

$$\text{gdzie} \quad (F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right), \quad F = F(q, p, t), \quad G = G(q, p, t)$$

$$(F, G)' = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_l} \frac{\partial G}{\partial P_l} - \frac{\partial F}{\partial P_l} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \right), \quad \begin{aligned} F &= F(Q, P, t) = F(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \\ G &= G(Q, P, t) = G(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \end{aligned}$$

Inny użyteczny warunek dostateczny kanoniczności przekształcenia (dowód w dodatku 3)

Transformacja jest kanoniczną transformacją uniwalencyjną gdy dla wszystkich „nowych” współrzędnych Q_l i pędów P_l otrzymanych w wyniku rozważanej transformacji „starych” współrzędnych q_l i pędów p_l

$$q_l \rightarrow Q_l = Q_l(q, p, t), \quad p_l \rightarrow P_l = P_l(q, p, t) \quad l = 1, \dots, f$$

zachodzi $(Q_l, Q_k) = (P_l, P_k) = 0, \quad (Q_l, P_k) = \delta_{lk} \quad l, k = 1, 2, \dots, f$

(11)

gdzie

$$(F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right) \quad \text{-nawias Poissona funkcji} \quad F = F(q, p, t), G = G(q, p, t)$$

Przykłady

Przykład. Sprawdzenie kanoniczności przekształcenia kanonicznego

$$Q = q \cos(u) + p \sin(u) \qquad P = -q \sin(u) + p \cos(u)$$

Trzeba pokazać iż $(Q_i, P_j) = \delta_{ij} \qquad (Q_i, Q_j) = (P_i, P_j) = 0$

W przypadku gdy przestrzeń fazowa ma 2 wymiary wymaga to obliczenia 3 , a w zasadzie tylko 1 nawiasu Poissona (wynik pozostałych dwóch oczywisty na mocy definicji nawiasu Poissona)

$$(Q, P) = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$(Q, Q) = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$(P, P) = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

Przykład. Wyznaczenie funkcji tworzącej $W(q, Q)$ przekształcenia kanonicznego

$$Q = q \cos(u) + p \sin(u) \Rightarrow p = \frac{Q}{\sin(u)} - q \operatorname{ctg}(u)$$

$$P = -q \sin(u) + p \cos(u) \Rightarrow P = -q \sin(u) + p \cos(u) = -q \sin(u) + Q \operatorname{ctg}(u) - q \operatorname{ctg}(u) \cos(u) =$$

$$= -q \left(\sin(u) + \frac{\cos^2(u)}{\sin(u)} \right) + Q \operatorname{ctg}(u) = -\frac{q}{\sin(u)} + Q \operatorname{ctg}(u)$$

$$p = \frac{\partial W(q, Q)}{\partial q} \Rightarrow W(q, Q) = \int p(q, Q) dq + C(Q)$$

$$W(q, Q) = \int \left(\frac{Q}{\sin(u)} - q \operatorname{ctg}(u) \right) dq + C(Q) = \frac{Qq}{\sin(u)} - \frac{q^2}{2} \operatorname{ctg}(u) + C(Q)$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = -\frac{q}{\sin(u)} - \frac{dC(Q)}{dQ} \Rightarrow \frac{dC(Q)}{dQ} = -Q \operatorname{ctg}(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(Q) = -\frac{1}{2} Q^2 \operatorname{ctg}(u) + \text{const} \stackrel{np.}{=} -\frac{1}{2} Q^2 \operatorname{ctg}(u) \Rightarrow W(q, Q) = \frac{Qq}{\sin(u)} - \frac{q^2}{2} \operatorname{ctg}(u) - \frac{Q^2}{2} \operatorname{ctg}(u)$$

Przykład Zastosowanie transformacji kanonicznej do rozwiązania równań ruchu dla oscylatora harmonicznego.

Funkcja Hamiltona

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$m, \omega = \text{const}$

Funkcja tworząca

$$W(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q$$

$$P = - \frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2} m \omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \Rightarrow q^2 = \frac{2 P \sin^2 Q}{m \omega} \Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{2 P}{m \omega}} \sin Q$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = m \omega q \operatorname{ctg} Q = \pm \sqrt{2 m \omega P} \cos Q$$

Można sprawdzić iż

$$(q, p)' \stackrel{\text{ozn.}}{=} (q, p)_{Q, P} = 1$$

$$(q, p)_{Q, P} = \frac{\partial q}{\partial Q} \cdot \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \cdot \frac{\partial p}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2 P}{m \omega}} \frac{2 m \omega}{2 \sqrt{2 m \omega P}} \cos^2 Q + \frac{1}{2 \sqrt{\frac{2 P}{m \omega}}} \frac{2}{m \omega} \sqrt{2 m \omega P} \sin^2 Q = 1$$

Jest oczywiste iż

$$(q, q)' = (q, q)_{Q, P} = \frac{\partial q}{\partial Q} \cdot \frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \cdot \frac{\partial q}{\partial Q} = 0 \qquad (p, p)' = (p, p)_{Q, P} = \frac{\partial p}{\partial Q} \cdot \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial P} \cdot \frac{\partial p}{\partial Q} = 0$$

czyli przekształcenie $Q \rightarrow q, P \rightarrow p$ jak i przekształcenie odwrotne $q \rightarrow Q, p \rightarrow P$ jest kanoniczne
 (co było wiadomo gdyż była dana funkcja tworząca przekształcenia kanonicznego)

$$q = \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad p = \pm \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Funkcja Hamiltona w nowych zmiennych

$$\bar{H}(Q, P) = H + \frac{\partial W}{\partial t} \stackrel{\frac{\partial W}{\partial t} = 0}{=} H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \omega P$$

Równania Hamiltona w nowych zmiennych

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + \text{const} = \omega t + Q_0$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const} = P_0$$

Po powrocie do starych zmiennych

$$q = \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \pm \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0)$$

$$p = \pm \sqrt{2m\omega P} \cos Q = \pm \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + Q_0)$$

Równania Hamiltona-Jacobiego

Metoda Hamiltona-Jacobiego stanowi metodę wyznaczenia ruchu w przestrzeni fazowej w której rozwiązanie układu $2f$ równań różniczkowych zwyczajnych sprowadzamy do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego.

Jest ona oparta o wykorzystanie transformacji kanonicznych:

$$\begin{aligned} q_l &\rightarrow Q_l(q, p, t) & p_l &\rightarrow P_l(q, p, t) \\ q_l &= q_l(Q, P, t), & p_l &= p_l(Q, P, t), \quad l = 1, 2, \dots, f \end{aligned}$$

prowadzących do zmiennych Q, P , z których żadna nie występuje w funkcji Hamiltona po transformacji; można założyć iż funkcja Hamiltona w nowych zmiennych jest tożsamościowo równa zero

$$\overline{H}(Q, P, t) \equiv 0$$

Równania Hamiltona w nowych zmiennych i jego rozwiązania

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_l} = 0 \\ \dot{P}_l &= -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_l} = 0 \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Q_l &= \text{const} = \alpha_l \\ P_l &= \text{const} = \beta_l \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{stałe całkowania} \end{array}$$

Jak widać współrzędne i pędy po transformacji są stałymi ruchu.

Wstawiając powyższe rozwiązania do wzorów definiujących transformację kanoniczną, otrzymujemy ruch fazowy układu w zmiennych q, p w zależności od $2f$ stałych dowolnych $\alpha_l, \beta_l, l = 1, 2, \dots, f$

$$q_l = q_l(\alpha, \beta, t), \quad p_l = p_l(\alpha, \beta, t) \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Stałe dowolne wyznaczamy z warunków początkowych

$$q_l(\alpha, \beta, t_0) = q_{l0}, \quad p_l(\alpha, \beta, t_0) = p_{l0}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Problem całkowania równań Hamiltona sprowadza się więc do znalezienia transformacji kanonicznej, prowadzącej do zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona, a w zasadzie do znalezienia funkcji tworzącej $S(q, P, t)$ opisującej tę transformację kanoniczną. Spełnia ona relacje

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \text{gdzie} \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0$$

oraz relacje

$$\overline{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0$$

Wstawiając do powyższego równania w miejsce pędów uogólnionych p_l ich definicje przy pomocy funkcji tworzącej transformacji kanonicznej, otrzymujemy równanie z którego możemy wyznaczyć funkcje tworzącą

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Równanie Hamiltona - Jacobiego

Wówczas

$$Q_l = \alpha_l, \quad P_l = \beta_l \Rightarrow p_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial q_l}, \quad \alpha_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial \beta_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Rozwiązując powyższe równania względem q, p dostajemy ruch fazowy układu

$$\begin{aligned} q_l &= q_l(\alpha, \beta, t) \\ p_l &= p_l(\alpha, \beta, t) \end{aligned} \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Do wyznaczenia ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej wystarczą równania

Równanie Hamiltona - Jacobiego

$$H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Rozwiązanie powyższego równania, zależne od stałych dowolnych, w liczbie równej liczbie zmiennych niezależnych, nazywa się **całką zupełną równania Hamiltona - Jacobiego**. Zmiennymi niezależnymi są $q_1, q_2, \dots, q_f, t$, więc będzie $f+1$ stałych dowolnych.

Jednak równanie Hamiltona-Jacobiego zawiera tylko pochodne funkcji S , więc funkcję S można wyznaczyć tylko z dokładnością do stałej addytywnej. Stąd wynika, że jedna ze stałych dowolnych będzie stałą addytywną.

Całka zupełna równania Hamiltona - Jacobiego ma postać

$$S = \tilde{S}(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f, t) + C, \quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f, C - \text{stałe dowolne}$$

Zakładamy iż

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_k \partial \beta_l} \right| \neq 0$$

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona

Separacja czasu

$$\text{Niech } \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const} \stackrel{\text{ozn.}}{=} E$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Podstawiamy $S = S_0(q_1, q_2, \dots, q_f) - Et \Rightarrow H \left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f} \right) = E \quad (*)$

gdzie S_0 - skrócona funkcja tworząca

Rozwiązanie (*) zależy od $f+1$ stałych dowolnych $E, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_f, C$ (gdzie C jest stałą addytywną)

$$S_0 = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, E, \beta_2, \dots, \beta_f) + C \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, E, \beta_2, \dots, \beta_f) - Et + C,$$

Wprowadzając stałą β_1 i podstawiając za E pewną określoną funkcję $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f$, otrzymujemy

$$E = E(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f) \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f) - E(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_f)t + C$$

Ruch układu w przestrzeni fazowej otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t \quad p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q_l} \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona

Separacja współrzędnych cyklicznych

Niech $\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0$ W tym przypadku dokonujemy podstawienia

$$S = S_1(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f, t) + \beta_r q_r \Rightarrow$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, \frac{\partial S_1}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_1}{\partial q_{r-1}}, \beta_r, \frac{\partial S_1}{\partial q_{r+1}}, \dots, \frac{\partial S_1}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$$

Całka zupełna równania Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$S = S_1 + \beta_r q_r = \tilde{S}_1(q_1, q_2, \dots, q_{r-1}, q_{r+1}, \dots, q_f, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \dots, \beta_f, t) + \beta_r q_r + C$$

Ruch układu otrzymujemy więc z równań

$$\begin{cases} p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l} = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial q_l} \quad (l \neq r) & \alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \beta_l} \quad (l \neq r) \\ p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r} = \beta_r & \alpha_r = \frac{\partial S}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \beta_r} + q_r \end{cases}$$

Zmienne separowalne

W równaniu Hamiltona-Jacobiego zmienne są separowalne, jeżeli całka zupełna ma postać

$$S = S_0(q_1, q_2, \dots, q_f) - Et \quad \text{gdzie} \quad S_0 = \sum_{l=1}^f S_l(q_l) \quad (*)$$

co ma miejsce gdy funkcja Hamiltona ma postać $H = H(F_1(q_1, p_1), \dots, F_f(q_f, p_f))$

W najprostszym przypadku $H = \sum_{l=1}^f F_l(q_l, p_l)$

W powyższym przypadku zmienne są separowalne, o czym można się przekonać, dokonując podstawienia(*). Skrócone równanie Hamiltona Jacobiego

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E \Leftrightarrow \sum_{l=1}^f F_l\left(q_l, \frac{\partial S_l}{\partial q_l}\right) = E$$

rozpada się na układ f równań różniczkowych zwyczajnych

$$F_l\left(q_l, \frac{dS_l}{dq_l}\right) = E_l, \quad l = 1, 2, \dots, f, \quad \sum_{l=1}^f E_l = E \quad E_l = E_l(\beta_l) = \beta_l^{np}$$

Całka zupełna równania Hamiltona Jacobiego jest sumą f całek zupełnych S_l powyższych równań i

można uwzględniając to iż $S_l = \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C_l, l = 1, 2, \dots, f$

zapisać je w postaci $S = \sum_{l=1}^f \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C - Et \quad \text{gdzie} \quad C = \sum_{l=1}^f C_l$

Przykład: Wyznaczenie ruchu trójwymiarowego oscylatora harmonicznego przy pomocy równania Hamiltona-Jacobiego

Funkcja Hamiltona dla rozważanego zagadnienia

$$H = T(p_x, p_y, p_z) + V(x, y, z) = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Separacja czasu

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow S = S_0(x, \beta_x, y, \beta_y, z, \beta_z, C) - Et = \tilde{S}_0(x, \beta_x, y, \beta_y, z, \beta_z) - Et + C$$

$E = E(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, C -stała addytywna

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E$$

$$\alpha_l = \frac{\partial S(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z)}{\partial \beta_l} \Rightarrow \alpha_l = \frac{\partial \tilde{S}_0(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z)}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E(\beta_x, \beta_y, \beta_z)}{\partial \beta_l} \quad l=x,y,z$$

Separacja zmiennych x, y, z

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E \quad (**)$$

$$H = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_x}{2} x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_y}{2} y^2 \right) + \left(\frac{p_z^2}{2m} + \frac{k_z}{2} z^2 \right) \Rightarrow H = F_x(x, p_x) + F_y(y, p_y) + F_z(z, p_z) \Rightarrow$$

$$S_0 = S_{0x}(x) + S_{0y}(y) + S_{0z}(z)$$

Można pokazać iż równanie (**) jest równoważne 3 równaniom (patrz uzupełnienie po przykładzie)

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_x}{2} x^2 = E_x \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y} \right)^2 + \frac{k_y}{2} y^2 = E_y \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E_z$$

Przy czym zachodzi

$$E_x + E_y + E_z = E$$

Stałe o wymiarze energii E_x, E_y, E_z odgrywają rolę stałych $\beta_x, \beta_y, \beta_z$. A zatem

$$S_{0x} = \tilde{S}_{0x}(x, \beta_x = E_x) + C_x \quad S_{0y} = \tilde{S}_{0y}(y, \beta_y = E_y) + C_y \quad S_{0z} = \tilde{S}_{0z}(z, \beta_z = E_z) + C_z$$

$$C = C_x + C_y + C_z$$

$$\alpha_x = \frac{\partial \tilde{S}_{0x}}{\partial E_x} - \frac{\partial E}{\partial E_x} t = \frac{\partial \tilde{S}_{0x}}{\partial E_x} - t$$

$$\alpha_l = \frac{\partial \tilde{S}_0(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z)}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t \Rightarrow \alpha_y = \frac{\partial \tilde{S}_{0y}}{\partial E_y} - \frac{\partial E}{\partial E_y} t = \frac{\partial \tilde{S}_{0y}}{\partial E_y} - t$$

$$\alpha_z = \frac{\partial \tilde{S}_{0z}}{\partial E_z} - \frac{\partial E}{\partial E_z} t = \frac{\partial \tilde{S}_{0z}}{\partial E_z} - t$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_x}{2} x^2 = E_x \Rightarrow \left(\frac{dS_{0x}}{dx} \right) = \pm \sqrt{2m \left(E_x - \frac{k_x}{2} x^2 \right)} \Rightarrow dS_{0x} = \pm \sqrt{2m \left(E_x - \frac{k_x}{2} x^2 \right)} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{0x} = \pm \int \sqrt{2m \left(E_x - \frac{k_x}{2} x^2 \right)} dx + C_x \Rightarrow \tilde{S}_{0x} = S_{0x} - C_x = \pm \int \sqrt{2m \left(E_x - \frac{k_x}{2} x^2 \right)} dx$$

$$\alpha_x = \frac{\partial \tilde{S}_{0x}}{\partial E_x} - t \Rightarrow \alpha_x = \pm \int \frac{m}{\sqrt{2m \left(E_x - \frac{k_x}{2} x^2 \right)}} dx - t = \pm \sqrt{\frac{m}{k_x}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{k_x}{2E_x}} x \right) - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k_x}{m}} (\alpha_x + t) = \pm \arcsin \left(\sqrt{\frac{k_x}{2E_x}} x \right) \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2E_x}{k_x}} \sin \left(\sqrt{\frac{k_x}{m}} (\alpha_x + t) \right)$$

Podobnie można pokazać iż

$$\left(\frac{dS_{0y}}{dy} \right) = \pm \sqrt{2m \left(E_y - \frac{k_y}{2} y^2 \right)} \Rightarrow \tilde{S}_{0y} = \pm \int \sqrt{2m \left(E_y - \frac{k_y}{2} y^2 \right)} dy \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2E_y}{k_y}} \sin \left(\sqrt{\frac{k_y}{m}} (\alpha_y + t) \right)$$

$$\left(\frac{dS_{0z}}{dz} \right) = \pm \sqrt{2m \left(E_z - \frac{k_z}{2} z^2 \right)} \Rightarrow \tilde{S}_{0z} = \pm \int \sqrt{2m \left(E_z - \frac{k_z}{2} z^2 \right)} dz \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{2E_z}{k_z}} \sin \left(\sqrt{\frac{k_z}{m}} (\alpha_z + t) \right)$$

Uzupełnienie: Analiza równania

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E$$

$$S_0 = S_{0x}(x) + S_{0y}(y) + S_{0z}(z) \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 = E - \frac{k_y}{2} y^2 - \frac{k_z}{2} z^2 - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Równanie powyższe, którego obie strony zależą od innych zmiennych, będzie spełnione gdy jego obie strony są równe stałej, którą można oznaczyć jako E_x . Otrzymujemy w ten sposób dwa równania

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 = E_x \quad (\text{R1})$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E - E_x \quad (*)$$

Przekształcając równanie (*) otrzymujemy

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{k_y}{2} y^2 = E - E_x - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{k_z}{2} z^2$$

Równanie powyższe, którego obie strony zależą od innych zmiennych, będzie spełnione gdy jego obie strony są równe stałej, którą można oznaczyć jako E_y . Otrzymujemy w ten sposób dwa równania

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{k_y}{2} y^2 = E_y \quad (\text{R2})$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_z}{2} z^2 = E - E_x - E_y \quad (**)$$

Wprowadzają oznaczenie $E_z = E - E_x - E_y$

równanie (**) można przepisać w postaci

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_z}{2} z^2 = E_z \quad (\text{R3})$$

Widać iż wyjściowe równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 + \frac{k_z}{2} z^2 = E$$

jest równoważne równaniom różniczkowym zwyczajnym (R1), (R2) i (R3) przy

spełnieniu relacji dodatkowej $E = E_x + E_y + E_z$ przy czym $S_0 = S_{0x}(x) + S_{0y}(y) + S_{0z}(z)$

Równanie Hamiltona-Jacobiego jako podstawa obliczeń przybliżonych

1) Przedstawiamy pełną funkcję Hamiltona $H(q,p,t)$ jako sumę funkcji Hamiltona $H_0(q,p,t)$ dla której znamy rozwiązanie równań ruchu oraz mniejszy człon $H_1(q,p,t)$ opisujący zaburzenie

2) Rozważamy przekształcenie kanoniczne $q_l \rightarrow Q_l = \alpha_l, p_l \rightarrow P_l = \beta_l$ o funkcji tworzącej $S(q,\beta,t)$ spełniającej równanie Hamiltona –Jacobiego z funkcją Hamiltona H_0

$$H_0 \left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

prowadzącej do funkcji Hamiltona

$$\bar{H}(\alpha, \beta, t) = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_1 + H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_1(\alpha, \beta, t)$$

przy czym zachodzą relacje

$$p_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial q_l} \quad \alpha_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial \beta_l} \quad l = 1, \dots, f$$

Nowe współrzędne i pędy spełniają **równania ruchu Hamiltona**

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_l} \quad \dot{\beta}_l = - \frac{\partial H_1(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_l}$$

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha, \beta, t)}{\partial \beta_l} \quad \dot{\beta}_l = - \frac{\partial H_1(\alpha, \beta, t)}{\partial \alpha_l} \quad (*)$$

W przypadku gdyby $H_1=0$ to α_l, β_l były by stałymi

W rozważanym przypadku gdy H_1 jest małe w pierwszym przybliżeniu można zastąpić powyższy układ równań układem w którym zestaw zmiennych α, β został zastąpiony przez zestaw stałych $\alpha_0 = \alpha(t=0), \beta_0 = \beta(t=0)$

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha_0, \beta_0, t)}{\partial \beta_l} \quad \dot{\beta}_l = - \frac{\partial H_1(\alpha_0, \beta_0, t)}{\partial \alpha_l}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań poprzez całkowanie

$$\alpha_{1l}(t) = \alpha_l(t=0) + \int_0^t \frac{\partial H_1(\alpha_0, \beta_0, t)}{\partial \beta_l} dt \quad \beta_{1l}(t) = \beta_l(t=0) - \int_0^t \frac{\partial H_1(\alpha_0, \beta_0, t)}{\partial \alpha_l} dt$$

daje nam przybliżoną wartość zmiennych α_l, β_l w chwili czasu t oznaczoną powyżej przez α_{1l}, β_{1l} , którą można wykorzystać do sformułowania równań (*) w kolejnym przybliżeniu w postaci

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha_1, \beta_1, t)}{\partial \beta_l} \quad \dot{\beta}_l = - \frac{\partial H_1(\alpha_1, \beta_1, t)}{\partial \alpha_l}$$

Po określeniu zależności α_l, β_l od czasu zależność pierwotnych zmiennych q, p od czasu możemy wyznaczyć z relacji

$$p_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial q_l} \quad \alpha_l = \frac{\partial S(q, \beta, t)}{\partial \beta_l}$$

Przykład oscylator harmoniczny $H = H_0 + H_1$ $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ $H_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian) H_0 opisuje cząstkę swobodną

Równanie Hamiltona-Jacobiego dla funkcji H_0

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Można uwzględniając to iż $\frac{\partial H_0}{\partial x} = 0, \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0$ zapisać S w postaci $S = \beta x - Et$

Ponieważ $p = \frac{\partial S}{\partial x} = \beta$ i $E = H_0 = \frac{p^2}{2m}$ to $S = \beta x - \frac{\beta^2}{2m}t$ (β nowy pęd po transformacji kanonicznej, we wzorze na S pominięto stałą addytywną)

Nowe współrzędna α po transformacji kanonicznej

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = x - \frac{\beta t}{m} \Rightarrow x = \alpha + \frac{\beta t}{m}$$

Uwzględnienie obecności funkcji $H_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\alpha + \frac{\beta t}{m} \right)^2$

powoduje iż α, β przestają być stałymi lecz spełniają równania

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \omega^2 t \left(\alpha + \frac{\beta t}{m} \right) \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = -m\omega^2 \left(\alpha + \frac{\beta t}{m} \right)$$

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t \left(\alpha + \frac{\beta t}{m} \right) \quad \dot{\beta} = -m \omega^2 \left(\alpha + \frac{\beta t}{m} \right)$$

W pierwszym przybliżeniu równania te można uprościć do postaci

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0 t}{m} \right) \quad \dot{\beta} = -m \omega^2 \left(\alpha_0 + \frac{\beta_0 t}{m} \right) \quad \text{gdzie} \quad \alpha_0 = \alpha(t=0), \beta_0 = \beta(t=0)$$

Założmy iż w chwili początkowej $t=0$ cząstka znajdowała się w punkcie o $x=0$ co uwzględniając relację $x = \alpha + \frac{\beta t}{m}$ prowadzi do wniosku iż $\alpha_0 = 0$ a zatem

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega^2 \beta_0}{m} t^2 \Rightarrow \alpha(t) \stackrel{\text{ozn}}{=} \alpha_1(t) = \frac{\omega^2 \beta_0}{3m} t^3 \quad \dot{\beta} = -\omega^2 \beta_0 t \Rightarrow \beta(t) \stackrel{\text{ozn}}{=} \beta_1(t) = \beta_0 - \frac{1}{2} \omega^2 \beta_0 t^2$$

W kolejnym przybliżeniu

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1 t}{m} \right) = \omega^2 t \left(\frac{\omega^2 \beta_0 t^3}{3m} + \frac{\beta_0 t}{m} - \frac{\omega^2 \beta_0 t^3}{2m} \right) = \frac{\beta_0 \omega^2}{m} \left(t^2 - \frac{1}{6} \omega^2 t^4 \right) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{\beta_0 \omega^2}{m} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{30} \omega^2 t^5 \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= -m \omega^2 \left(\alpha_1 + \frac{\beta_1 t}{m} \right) = -m \omega^2 \left(\frac{\beta_0 \omega^2 t^3}{3m} + \frac{\beta_0 t}{m} - \frac{\beta_0 \omega^2 t^3}{2m} \right) = \\ &= -\omega^2 \beta_0 t + \frac{1}{6} \omega^4 \beta_0 t^3 \Rightarrow \beta(t) = \beta_0 - \frac{1}{2} \omega^2 \beta_0 t^2 + \frac{1}{24} \omega^4 \beta_0 t^4 \end{aligned}$$

$$\text{A zatem} \quad x = \alpha + \frac{\beta t}{m} \approx \frac{\beta_0}{m \omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right] \quad p = \beta \approx \beta_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right]$$

$$x = \alpha + \frac{\beta t}{m} \approx \frac{\beta_0}{m \omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right]$$

$$p = \beta \approx \beta_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right]$$

Uzyskany wynik można porównać z dokładnym rozwiązaniem przy warunku początkowym $x(t=0)=0$

$$x = A \sin(\omega t) = \frac{p_0}{m \omega} \sin(\omega t) \quad p = m \dot{x} = mA \omega \cos(\omega t) = p_0 \cos(\omega t)$$

które dla $\omega t \ll 1$ można przybliżyć poprzez następujące rozwinięcia

$$p_0 = p(t=0)$$

$$x \approx \frac{p_0}{m \omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} \right]$$

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} \right]$$

zgodne ze wzorem znalezionym poprzednio przy uwzględnieniu iż $\beta_0 = p_0$

Dodatki dla zainteresowanych

Dodatek 1 Dowód relacji (1-5) zawierających warunki kanoniczności przekształcenia

Równania Hamiltona równoważne są następującej zasadzie wariacyjnej

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H(q, p, t) \right] dt = 0$$

Uwaga : q_l, p_l – zm. niezależne $\Rightarrow$.

$$\delta q_l(t_0) = \delta q_l(t_1) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f \quad \delta q_l, \delta p_l - \text{dowolne}, \quad \dot{q}_l = \frac{dq_l}{dt} \Rightarrow \delta \dot{q}_l = \frac{d \delta q_l}{dt},$$

Dowód:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H(q, p, t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(p_l \delta \dot{q}_l + \dot{q}_l \delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(p_l \frac{d \delta q_l}{dt} + \dot{q}_l \delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{d}{dt} (p_l \delta q_l) - \dot{p}_l \delta q_l + \dot{q}_l \delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(-\dot{p}_l - \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \delta q_l + \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \delta p_l \right] dt + \sum_{l=1}^f p_l \delta q_l \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f - \left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \delta q_l + \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \delta p_l \right] dt \Leftrightarrow \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad l = 1, \dots, f \quad \text{równania Hamiltona} \end{aligned}$$

Można zauważyć iż co do wartości $\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H = L$

Zasada wariacyjna, prowadząca do równań Hamiltona, musi być spełniona w starych i nowych zmiennych

$$\left. \begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H(q, p, t) \right] dt &= 0, & \delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) &= 0, & \delta p_l(t=t_0) = \delta p_l(t=t_1) &= 0, & (*) \\ \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f P_l \dot{Q}_l - \bar{H}(Q, P, t) \right] dt &= 0, & \delta Q_l(t=t_0) = \delta Q_l(t=t_1) &= 0, & \delta P_l(t=t_0) = \delta P_l(t=t_1) &= 0 & (**) \end{aligned} \right\}$$

Przy spełnieniu równ. (*) równ. (**) będzie spełnione gdy
 będzie spełnione równ. (***) z dowolnie wybraną stałą $c \neq 0$ Formułując zasadę nałożyliśmy dodatkowe warunki na wariacje pędów

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - H(q, p, t) \right] dt - c \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f P_l \dot{Q}_l - \bar{H}(Q, P, t) \right] dt = 0 \quad (***)$$

$c = 1 \Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) \right] dt = 0$ Wybór stałej c determinuje wybór nowej funkcji Hamiltona

Powyższy związek z $c=1$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu funkcji $p_l(t), q_l(t), P_l(t), Q_l(t)$, zachodzi tożsamość

$$\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \Phi(Q, P, t) \quad \leftarrow \text{dowolna funkcja różniczkowalna } (Q, P, t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi$$

Dowód:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f (p_l \dot{q}_l - P_l \dot{Q}_l) - (H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)) \right] dt =$$

$$= \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\delta\Phi}{dt} dt = \delta\Phi \Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q_l} \delta Q_l + \frac{\partial \Phi}{\partial P_l} \delta P_l \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

Warunek dostateczny, by transformacja od starych (q,p) do nowych (Q,P) zmiennych zachowywała postać równań Hamiltona definiujący uniwalencyjne transformacje kanoniczne. Warunek ten określa również sposób transformacji funkcji Hamiltona. W dalszych rozważaniach zawężamy pojęcie transformacji kanonicznych do transformacji uniwalencyjnych.

Równania Hamiltona są niezmiennicze względem **przekształcenia kanonicznego** ze starych (q,p) do nowych (Q,P) zmiennych, jeżeli spełniony jest warunek

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi(Q, P, t) \quad (6)$$

Przy odpowiednich założeniach co do odwracalności transformacji różniczkę funkcji tworzącej Φ można zapisać jako funkcje tych samych zmiennych, których różniczki występują po lewej stronie równania (6).

$$|\partial q_k / \partial P_l| \neq 0 \Rightarrow P_l = P_l(q, Q, t), \quad W(q, Q, t) \equiv \Phi(Q, P(q, Q, t), t),$$

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dW(q, Q, t)$$

funkcja tworząca
przekształcenia
kanonicznego

Ponieważ różniczki dq_l, dQ_l, dt są dowolne, więc

$$p_l = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_l}, \quad P_l = - \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_l}, \quad (1)$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$$

spełniających warunki (1)
równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile
hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial W}{\partial t}(q(Q, P, t), Q, t)$$

Gdy $q_l = q_l(Q, P) \quad p_l = p_l(Q, P)$
to można tak wybrać W by $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$

Warunek kanoniczności przekształcenia można zapisać przy pomocy dowolnych dwóch spośród czterech zestawów zmiennych p_l, q_l, P_l, Q_l , w ten sposób by różniczki tych zmiennych pojawiły się w równaniu równoważnym równaniu (6). Wymaga to dodania do obu stron równania (6) różniczki iloczynu odpowiednich zmiennych co prowadzi do zmiany postaci funkcji tworzącej. Np. dodając różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^f P_l Q_l$

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt + \sum_{l=1}^f (P_l dQ_l + Q_l dP_l) = d[\Phi(Q, P, t)] + d\left[\sum_{l=1}^f P_l Q_l\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f (p_l dq_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\left[\Phi(Q, P, t) + \sum_{l=1}^f P_l Q_l\right]$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej $F_1(q, Q, t) = W(q, Q, t)$ wprowadzamy funkcję tworzącą $F_2(q, P, t) = S(q, P, t)$

$$|\partial q_k / \partial Q_l| \neq 0 \Rightarrow Q_l = Q_l(q, P, t) \Rightarrow S(q, P, t) = \Phi(Q(q, P, t), P, t) + \sum_{l=1}^f P_l Q_l(q, P, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f (p_l dq_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dS(q, P, t)$$

Ponieważ różniczki dq_l, dP_l są dowolne, więc

$$p_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P_l} \quad (2)$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q(Q, P, t), P, t)$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$$

spełniających warunki (2)

równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi(Q, P, t) \quad (6)$$

Odejmując różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^f p_l q_l$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt - \sum_{l=1}^f (p_l dq_l + q_l dp_l) &= d[\Phi(Q, P, t)] - d\left[\sum_{l=1}^f p_l q_l\right] \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^f (-q_l dp_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt &= d\left[\Phi(Q, P, t) - \sum_{l=1}^f p_l q_l\right] \end{aligned}$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej W wprowadzamy funkcję tworzącą $F_3(p, Q, t)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p_k}{\partial P_l} \right| \neq 0 \Rightarrow P_l = P_l(p, Q, t), \quad \left| \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \right| \neq 0 \Rightarrow q_l = q_l(p, Q, t) \\ \Rightarrow F_3(p, Q, t) = \Phi(Q, P(p, Q, t), t) - \sum_{l=1}^f p_l q_l(p, Q, t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f (-q_l dp_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dF_3(p, Q, t)$$

Ponieważ różniczki dp_l, dQ_l są dowolne, więc

$$q_l = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_l}, \quad P_l = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_l} \quad (3)$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(p(Q, P, t), Q, t)$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$$

spełniających warunki (3)

równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\Phi(Q, P, t) \quad (6)$$

Dodając różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^f P_l Q_l - \sum_{l=1}^f p_l q_l$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^f (p_l dq_l - P_l dQ_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt + \sum_{l=1}^f (P_l dQ_l + Q_l dP_l) - \sum_{l=1}^f (p_l dq_l + q_l dp_l) = d[\Phi(Q, P, t)] + d\left[\sum_{l=1}^f P_l Q_l\right] - d\left[\sum_{l=1}^f p_l q_l\right] \\ \Rightarrow & \sum_{l=1}^f (-q_l dp_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = d\left[\Phi(Q, P, t) + \sum_{l=1}^f P_l Q_l - \sum_{l=1}^f p_l q_l\right] \end{aligned}$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej W wprowadzamy funkcję tworzącą $F_4(p, P, t)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\partial p_k / \partial Q_l| \neq 0 \\ |\partial P_k / \partial q_l| \neq 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} Q_l = Q_l(p, P, t) \\ q_l = q_l(p, P, t) \end{cases} \Rightarrow F_4(p, P, t) = \Phi(Q(p, P, t), P, t) + \sum_{l=1}^f P_l Q_l(p, P, t) - \sum_{l=1}^f p_l q_l(p, P, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \sum_{l=1}^f (-q_l dp_l + Q_l dP_l) - [H(q, p, t) - \bar{H}(Q, P, t)] dt = dF_4(p, P, t) \end{aligned}$$

Ponieważ różniczki dp_l, dP_l są dowolne, więc

$$q_l = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_l}, \quad Q_l = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_l} \quad (4)$$

Względem transformacji

$q_l = q_l(Q, P, t), \quad p_l = p_l(Q, P, t),$
spełniających warunki (4)
równania Hamiltona są niezmiennicze,
o ile hamiltonian transformujemy w
podany sposób

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(p(Q, P, t), P, t)$$

Można pokazać iż w przypadku transformacji kanonicznych uniwalencyjnych dla których zachodzi $\overline{H}(Q, P, t) = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$ spełnione są relacje określające wybór funkcji Hamiltona po transformacji kanonicznej uniwalencyjnej

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k} (\overline{H} - H) \quad (7)$$

Dowód

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial P_k} (\overline{H} - H)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F_4}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\frac{\partial F_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial P_k} (\overline{H} - H)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial W}{\partial Q_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\overline{H} - H)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(- \frac{\partial F_3}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\overline{H} - H)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\overline{H} - H) \quad (8)$$

gdy można znaleźć funkcje tworzącą $F_2=S$

gdy można znaleźć funkcje tworzącą F_4

gdy można znaleźć funkcje tworzącą $F_1=W$

gdy można znaleźć funkcje tworzącą F_3

Gdy transformacje kanoniczne nie zależą jawnie od czasu to $\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial P_k}{\partial t} = 0$ a $\overline{H} - H$ nie może zależeć od żadnych współrzędnych i pędów i można przyjąć iż $\overline{H} = H$

Dodatek 2. Dowód tego iż nawiasy Poissona są niezmiennikami uniwalencyjnych transformacji kanonicznych

1) Można pokazać iż w przypadku transformacji kanonicznych uniwalencyjnych spełnione są warunki (9) i (10)

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k} \quad (9)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \quad (10)$$

przy doborze funkcji Hamiltona po przekształceniu $\bar{H}(Q, P, t)$ tak by

Zróżniczkujemy po czasie wzory transformacyjne $Q(q, p, t)$ oraz $P(q, p, t)$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H),$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H)$$

$$\dot{Q}_k = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial Q_k}{\partial t}, \quad \dot{P}_k = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial P_k}{\partial t},$$

Z tożsamości

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \bar{H}(Q, P, t) - H(q, p, t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) + \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H), \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H)$$

Odejmujemy stronami i ponieważ w obu zestawach zmiennych obowiązują równania Hamiltona, mamy:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{Q}_k - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} = \sum_{l=1}^f \left[\left(\dot{q}_l \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \dot{p}_l \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_k} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right] + \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) = \\ &= \sum_{l=1}^f \left[\left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) + \left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right] + \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) \end{aligned}$$

$$0 = \sum_{l=1}^f \left[\left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) + \left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial Q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) = \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l} + \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) \right]$$

Równanie powyższe będzie spełnione dla dowolnej funkcji H , gdy zaznaczone wyrazy będą równe zeru, więc otrzymujemy zestaw równań (9) gdy spełnione są relacje (7).

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H)$$

Podobnie dowodzimy zestaw równań (10).

$$0 = \dot{P}_k + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} = \sum_{l=1}^f \left[\dot{q}_l \frac{\partial P_k}{\partial q_l} + \dot{p}_l \frac{\partial P_k}{\partial p_l} + \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \right] + \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H) =$$

$$\sum_{l=1}^f \left[\left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \frac{\partial P_k}{\partial p_l} + \frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial p_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) + \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l} \right) \frac{\partial P_k}{\partial q_l} + \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \right) \right] + \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H) =$$

$$= \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial H}{\partial p_l} \left(\frac{\partial p_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial q_l} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_l} \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \right) \right]$$

Ponieważ rozważamy dowolną funkcję H , zaznaczone wyrazy muszą być równe zeru,

więc otrzymujemy zestaw równań (10): $\frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$ gdy spełnione są relacje (8) $\frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H)$

2) Na podstawie relacji (9) i (10) $\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$

oraz relacji $\frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = \delta_{kl} \quad \frac{\partial Q_k}{\partial P_l} = \frac{\partial P_k}{\partial Q_l} = 0$

wykazujemy poniższe własności nawiasów Poissona określonych wzorem

dla nowych współrzędnych i pędów po transformacji kanonicznej uniwalencyjnej

$$(A, B) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial B}{\partial p_l} \frac{\partial A}{\partial q_l} \right)$$

$$(Q_m, P_n) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_n} + \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_n} \right) = \frac{\partial Q_m}{\partial Q_n} = \delta_{m,n} \quad (11a)$$

$$(Q_m, Q_n) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial Q_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial Q_n}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(-\frac{\partial Q_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial P_n} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial P_n} \right) = -\frac{\partial Q_m}{\partial P_n} = 0 \quad (11b)$$

$$(P_m, P_n) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial P_m}{\partial q_l} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial P_m}{\partial p_l} \frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial P_m}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_n} + \frac{\partial P_m}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial Q_n} \right) = \frac{\partial P_m}{\partial Q_n} = 0 \quad (11c)$$

3) Spełnienie relacji $(Q_m, P_n) = \delta_{m,n}, (Q_m, Q_n) = (P_m, P_n) = 0$ zapewnia niezmienniczość nawiasów Poissona dla

dowolnych funkcji $F(Q(q,p,t), P(q,p,t), t)$ i $G(Q(q,p,t), P(q,p,t), t)$

$$\begin{aligned} (F, G) &= \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left[\sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_l} \right) \sum_{n=1}^f \left(\frac{\partial G}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial p_l} + \frac{\partial G}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial p_l} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_l} + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_l} \right) \sum_{n=1}^f \left(\frac{\partial G}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial q_l} + \frac{\partial G}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) \right] = \\ &= \sum_{m,n=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial P_n} (Q_m, P_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial Q_n} (P_m, Q_n) + \frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial Q_n} (Q_m, Q_n) + \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial P_n} (P_m, P_n) \right] = \\ &= \sum_{m,n=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial P_n} \delta_{mn} - \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial Q_n} \delta_{nm} \right) = \sum_{m=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial Q_m} \frac{\partial G}{\partial P_m} - \frac{\partial F}{\partial P_m} \frac{\partial G}{\partial Q_m} \right) = (F, G)' \end{aligned}$$

Dodatek 3. Przekształcenie spełniające warunki (11) $(Q_l, Q_k) = (P_l, P_k) = 0, \quad (Q_l, P_k) = \delta_{lk}$

jest kanoniczne gdyż w nowych zmiennych obowiązują równania Hamiltona.

W dowodzie wykorzystujemy fakt iż spełnienie powyższych równań zapewnia niezmienniczość nawiasów Poissona względem rozważanych przekształceń (punkt 3 dowodu 2) oraz poniższe relacje

$$\frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = \delta_{kl} \quad \frac{\partial Q_k}{\partial P_l} = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = 0 \quad \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) \quad (7) \quad \frac{\partial P_k}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H) \quad (8)$$

Relacje (7) i (8) określają sposób wyboru funkcji Hamiltona w nowych zmiennych

Dowód

$$\dot{Q}_k = (Q_k, H) + \frac{\partial Q_k}{\partial t} = (Q_k, H)' + \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) = \frac{\partial H}{\partial P_k} + \frac{\partial}{\partial P_k} (\bar{H} - H) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}$$

gdzie

$$(Q_k, H) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = (Q_k, H)' = \sum_{l=1}^f \left(\overset{\delta_{kl}}{\frac{\partial Q_k}{\partial Q_l}} \frac{\partial H}{\partial P_l} - \overset{0}{\frac{\partial Q_k}{\partial P_l}} \frac{\partial H}{\partial Q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(\delta_{kl} \frac{\partial H}{\partial P_l} \right) = \frac{\partial H}{\partial P_k}$$

Analogicznie

$$\dot{P}_k = (P_k, H) + \frac{\partial P_k}{\partial t} = (P_k, H)' - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H) = - \frac{\partial H}{\partial Q_k} - \frac{\partial}{\partial Q_k} (\bar{H} - H) = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}$$

gdzie

$$(P_k, H) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial P_k}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = (P_k, H)' = \sum_{l=1}^f \left(\overset{0}{\frac{\partial P_k}{\partial Q_l}} \frac{\partial H}{\partial P_l} - \overset{\delta_{kl}}{\frac{\partial P_k}{\partial P_l}} \frac{\partial H}{\partial Q_l} \right) = \sum_{l=1}^f \left(- \delta_{kl} \frac{\partial H}{\partial Q_l} \right) = - \frac{\partial H}{\partial Q_k}$$

Dodatek 4. Równanie Hamiltona-Jacobiego dla cząstki poruszającej się w potencjale zależnym tylko od odległości od początku układu współrzędnych we współrzędnych sferycznych $V=V(r)$

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a.

Za współrzędne uogólnione przyjmujemy współrzędne kuliste

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

gdzie składowe prędkości w układzie sferycznym $v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r \dot{\theta}$ $v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$

$$\begin{aligned} \text{Pędy uogólnione} \quad p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} & p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Ponieważ siły są potencjalne i związki między współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zawierają czasu explicite to

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= E = T + V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + V(r) \\ H &= G(r, \theta, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{m}{2} \left[\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + r^2 \sin^2 \theta \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4 \theta} \right] + V(r) = \\ &= \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) \end{aligned}$$

Funkcja Hamiltona dla rozważanego zagadnienia

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r)$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Separacja czasu

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow S = S_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi, C) - Et = \tilde{S}_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi) - Et + C$$

$$E = E(\beta_r, \beta_\theta, \beta_\varphi) \quad , \quad C\text{-stała addytywna}$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E \quad \alpha_l = \frac{\partial \tilde{S}_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi)}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t$$

$$l = r, \theta, \varphi$$

Separacja zmiennych

a) zmienna cykliczna φ

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow S_0(r, \theta, \varphi) = \tilde{\tilde{S}}_0(r, \theta) + S_\varphi(\varphi) = \tilde{\tilde{S}}_0(r, \theta) + \beta_\varphi \varphi$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi} \right)^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E$$

Ponieważ $p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \beta_\varphi$ oraz $p_\varphi = L_z$ to stała β_φ ma sens stałej wartości

składowej z-towej momentu pędu

b) zmienne r, θ

$\tilde{\tilde{S}}_0(r, \theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta)$ (próba, prowadząca do sukcesu, co świadczy o separowalności zmiennych)

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E \Rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\beta_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r) = E$$

$$r^2 \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = 2m(E - V(r))r^2$$

$$\left[\left(\frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] = \left[2m(E - V(r)) - \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 \right] r^2$$

Ponieważ obie strony powyższego równania zależą od innych zmiennych to muszą być one równe stałej. Możemy ją oznaczyć jako kwadrat β_θ . Z równania tego wynikają więc dwa równania

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = \beta_\theta^2 \qquad \left[2m(E - V(r)) - \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right)^2 \right] r^2 = \beta_\theta^2$$

$$\left[2m(E - V(r)) - \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 \right] r^2 = \beta_\theta^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 = 2m(E - V(r)) - \frac{\beta_\theta^2}{r^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] = \beta_\theta^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 = \beta_\theta^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

Znalezienie całki ogólnej równania Hamiltona-Jacobiego

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - Et = \tilde{S}_r(r) + \tilde{S}_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - Et + C$$

sprowadza się do rozwiązania dwóch równań różniczkowych zwyczajnych

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = 2m(E - V(r)) - \frac{\beta_\theta^2}{r^2} \qquad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \beta_\theta^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

Przy czym można przyjąć iż rolę stałej β_r pełni energia E $E = \beta_r$

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - \beta_r t = \tilde{S}_r(r) + \tilde{S}_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - \beta_r t + C \quad \beta_r = E$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = 2m(\beta_r - V(r)) - \frac{\beta_\theta^2}{r^2} \quad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = \beta_\theta^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

Z postaci powyższych równań wynika iż $S_r = \tilde{S}_r(r, \beta_r, \beta_\theta) + C_r$, $S_\theta = \tilde{S}_\theta(\theta, \beta_\theta, \beta_\varphi) + C_\theta$

Równania określające ruch ciała przybierają postać

$$C = C_r + C_\theta$$

$$\alpha_r = \frac{\partial S}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \beta_r} - t \quad (*)$$

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l} \Rightarrow \alpha_\theta = \frac{\partial S}{\partial \beta_\theta} = \frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \beta_\theta} + \frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \beta_\theta} \quad (**)$$

$$\alpha_\varphi = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta_\varphi} = \frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \beta_\varphi} + \varphi \quad (***)$$

Równanie (*) wyznacza zależność $r(t)$ w czasie ruchu, zaś pozostałe równania pozwalają na wyznaczenie równania toru

Uwaga. Przeprowadzenie separacji zmiennych jest możliwe w układzie sferycznym także wówczas gdy potencjał ma postać

$$V(\vec{r}) = f(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2(\theta)}$$

Przy tym gdy $c(\varphi) \neq \text{const}$ to φ nie jest współrzędną cykliczną.