



OMNIS2

Formalizm kanoniczny-cz. 2

Analiza wybranych prostych trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

Właściwości trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

Twierdzenie Liouville'a

Stan układu punktów materialnych o f stopniach swobody można reprezentować jako punkt w $2f$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej** o współrzędnych $(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f)$
Układ w trakcie ruchu przemieszcza po pewnej trajektorii łączącej punkty w przestrzeni fazowej.

Wyznaczenie trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

Potencjał $V(x) = \frac{kx^2}{2}$ Energia kinetyczna $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$

x - współrzędna uogólniona

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$ Pęd uogólniony $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$

Funkcja Hamiltona $H = T + V = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E = \text{const}$ bo $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Równanie trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{kx^2}{2E} = 1 \Rightarrow$$

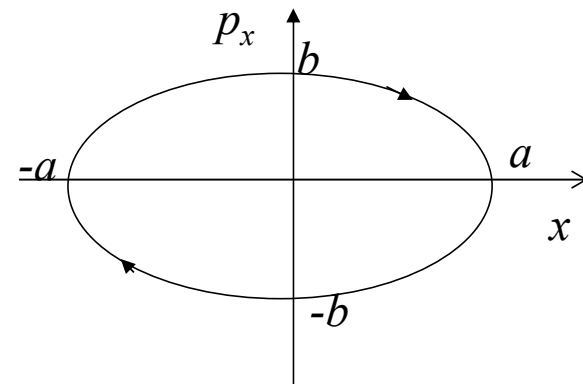
$$\Rightarrow \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{k}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{p_x^2}{b^2} = 1 \quad (\text{równanie elipsy}) \quad \text{gdzie} \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad b = \sqrt{2mE}$$

Dla analizowanego oscylatora trajektorie w pełni określa jego całkowita energia mechaniczna. Jest to słuszne gdy $E = \text{const}$ dla układów o 1 stopniu swobody

Równania Hamiltona $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$ $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$

Położenia równowagi stabilne (trwałe): punkt o $x=0, p_x=0$,
Spoczynek odpowiada minimalnej energii $E=0$

Pole elipsy rośnie z E



Wahadło matematyczne o długości l poruszające się w płaszczyźnie $z=0$

φ - współrzędna uogólniona

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} v_\varphi^2 - (-mgx) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

Pęd uogólniony

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$$

Funkcja Hamiltona

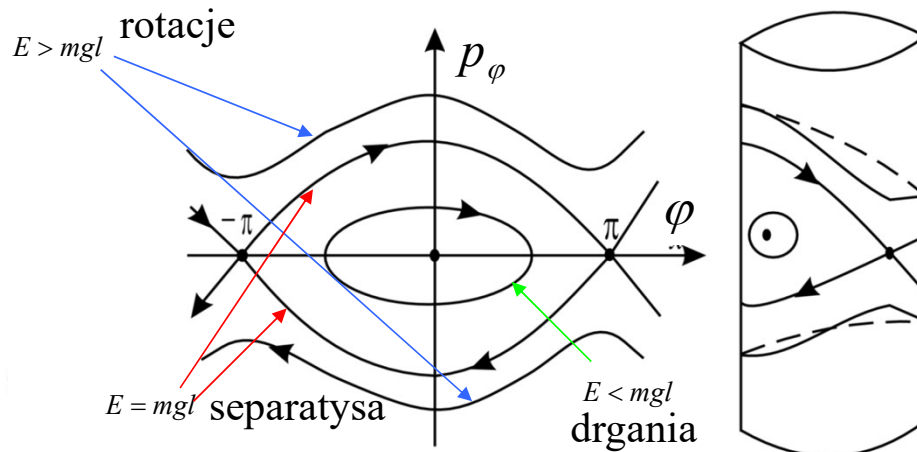
$$H = T + V = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi = E = \text{const}$$

$$p_\varphi = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \varphi)}$$

Równanie trajektorii

W trakcie ruchu musi być spełniony warunek $E \geq -mgl \cos(\varphi)$
czyli najmniejsza dopuszczalna energia jest równa $E = -mgl$

Gdy $E \leq mgl$ to ruch ciała odbywa się z zakresie $-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ gdzie $\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{E}{mgl}\right)$



W trakcie ruchu p_φ zmienia znak
Równania Hamiltona

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$$

Położenia równowagi

$\varphi = 0, p_\varphi = 0$ -trwałe ($E = -mgl$)

$\varphi = \pi(-\pi), p_\varphi = 0$ -niestabilne
($E = mgl$)

Linearyzacja układu równań $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2}$ $\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$ wokół położenia równowagi $\varphi = \pi, p_{\varphi} = 0$ (niestabilnego hiperbolicznego punktu stałego)

Wprowadzamy wielkości $\tilde{\varphi} = \varphi - \pi, \tilde{p}_{\varphi} = p_{\varphi} - 0 = p_{\varphi}$ o których zakładamy iż są małe

Zlinearyzowane równania Hamiltona

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \frac{\tilde{p}_{\varphi}}{ml^2} \quad \dot{\tilde{p}}_{\varphi} = -mgl \sin(\tilde{\varphi} + \pi) = mgl \sin(\tilde{\varphi}) \approx mgl \tilde{\varphi}$$

Wynika z nich równanie $ml^2 \ddot{\tilde{\varphi}} = mgl \tilde{\varphi} \Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} - \gamma^2 \tilde{\varphi} = 0$ gdzie $\gamma^2 = \frac{g}{l}$

mające ogólne rozwiązanie $\tilde{\varphi} = A \exp(\gamma t) + B \exp(-\gamma t)$

przy czym $\tilde{p}_{\varphi} = ml^2 \dot{\tilde{\varphi}} = ml^2 \gamma (A \exp(\gamma t) - B \exp(-\gamma t))$

$$\tilde{\varphi} = A \exp(\gamma t) + B \exp(-\gamma t) \quad \tilde{p}_\varphi = ml^2 \dot{\tilde{\varphi}} = ml^2 \gamma (A \exp(\gamma t) - B \exp(-\gamma t))$$

Jeśli $B=0$ to układ oddala się od rozważanego położenia równowagi wzdłuż prostej w przestrzeni fazowej o równaniu $\tilde{p}_\varphi = ml^2 \gamma A \exp(\gamma t) = ml^2 \gamma \tilde{\varphi}$ o ile $A \neq 0$

(gdy $A = B = 0$ to układ spoczywa w położeniu równowagi co odpowiada jednemu dozwolonemu zachowaniu gdy w chwili początkowej układ znajdował się w położeniu równowagi)

Jeśli $A=0$ to układ zbiega do rozważanego położenia równowagi wzdłuż prostej w przestrzeni fazowej o równaniu $\tilde{p}_\varphi = -ml^2 \gamma B \exp(-\gamma t) = -ml^2 \gamma \tilde{\varphi}$

o ile $B \neq 0$ przy czym osiąga on położenie równowagi po nieskończonym czasie
Rozważane przypadki odpowiadają ruchowi po separatysach

Gdy $A \neq 0$ oraz $B \neq 0$ to układ także po pewnym czasie oddala się od położenia równowagi przy czym $E \neq mgl$. Można pokazać iż torem w przestrzeni fazowej po którym porusza się układ jest łuk hiperboli o równaniu

$$\frac{\tilde{\varphi}^2}{4AB} - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{4AB(ml^2\gamma)^2} = 1$$

Linearyzacja układu równań $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{ml^2}$ $\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$ wokół położenia

równowagi $\varphi = 0, p_{\varphi} = 0$

Wprowadzamy wielkości $\tilde{\varphi} = \varphi - 0 = \varphi, \tilde{p}_{\varphi} = p_{\varphi} - 0 = p_{\varphi}$ o których zakładamy iż są małe

Zlinearyzowane równania Hamiltona $\dot{\tilde{\varphi}} = \frac{\tilde{p}_{\varphi}}{ml^2}$ $\dot{\tilde{p}}_{\varphi} = -mgl \sin(\varphi) = -mgl \sin(\tilde{\varphi}) \approx -mgl \tilde{\varphi}$

Wynika z nich równanie $ml^2 \ddot{\tilde{\varphi}} = -mgl \tilde{\varphi} \Rightarrow \ddot{\tilde{\varphi}} + \omega^2 \tilde{\varphi} = 0$ gdzie $\omega^2 = \frac{g}{l}$

mające ogólne rozwiązanie $\tilde{\varphi} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

przy czym $\tilde{p}_{\varphi} = ml^2 \dot{\tilde{\varphi}} = ml^2 \omega (-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$

Tym razem punkt pozostający początkowo blisko położenia równowagi będzie cały czas pozostawał blisko tego położenia

Można pokazać iż gdy obie stałe A i B nie są jednocześnie równe 0 czyli układ nie znajduje się w położeniu równowagi to torem w przestrzeni fazowej po którym porusza się układ jest łuk elipsy o równaniu

$$\frac{\tilde{\varphi}^2}{A^2 + B^2} + \frac{\tilde{p}_{\varphi}^2}{(A^2 + B^2)(ml^2 \omega)^2} = 1$$

Dygresja: Zależność kąta od czasu dla wahadła matematycznego w przypadku następujących

warunków początkowych ruchu $\varphi(t=0)=0$ ($\dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{2(E+mgl)}{ml^2}}$)

$$1) E=mgl \Rightarrow \varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right] - \pi \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pi$$

$$2) E > mgl \Rightarrow \varphi(t) = 2 \operatorname{am} \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2} t \right) \quad (\text{ruch rotacyjny})$$

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{am} \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2} t \right) \Rightarrow \frac{\dot{\varphi}_0}{2} t = F \left(\tilde{k}, u = \frac{\varphi}{2} \right) = \int_0^{u=\varphi/2} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2(\tilde{u})}} \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2}}$$

$F \left(\tilde{k}, u = \frac{\varphi}{2} \right)$ -całka eliptyczna pierwszego rodzaju w postaci Legendrea,
 am –funkcja zwana amplitudą (Rubinowicz)

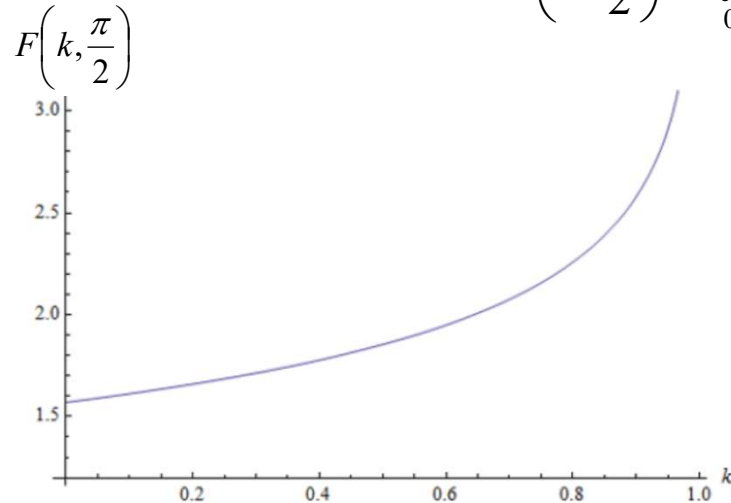
$$2) -mgl < E < mgl \Rightarrow \varphi = 2 \arcsin(k \sin(u)) = 2 \arcsin(k \sin(\operatorname{am}(\tilde{\omega} t))) \quad (\text{ruch oscylacyjny})$$

$$u = \operatorname{am}(\tilde{\omega} t) \Rightarrow \tilde{\omega} t = \int_0^u \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\tilde{u})}} = F(k, u) \quad \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = k \sin(u) \quad \tilde{\omega} = \frac{\dot{\varphi}_0}{2k} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad k = \sqrt{\frac{l\dot{\varphi}_0^2}{4g}} < 1$$

$$\text{Okres drgań } T = \frac{4F \left(k, \frac{\pi}{2} \right)}{\tilde{\omega}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \quad \operatorname{am} \left(\xi + 4F \left(k, \frac{\pi}{2} \right) \right) = \operatorname{am}(\xi) + 2\pi$$

Można pokazać iż

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(u)}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)k^2 + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)k^4 + \dots \right]$$



Gdy $k = \sqrt{\frac{l\dot{\phi}_0^2}{4g}} \ll 1$ to $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2}$ i $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}} * \frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

czyli okres drgań nie zależy od prędkości początkowej a więc także od wychylenia z położenia równowagi (izochronizm) . Gdy założenie to nie jest spełnione wówczas okres drgań rośnie ze wzrostem $\dot{\phi}_0$ ze wzrostem którego rośnie także maksymalna wartość kąta ϕ czyli amplituda drgań ϕ_m . Amplitudę drgań można określić z warunku

$$E = \frac{ml^2\dot{\phi}_0^2}{2} - mgl \cos(\phi_0 = 0) = -mgl \cos(\phi_m) \Rightarrow 1 - \cos(\phi_m) = \frac{l}{2g} \dot{\phi}_0^2 \Rightarrow 2 \sin^2\left(\frac{\phi_m}{2}\right) = \frac{l}{2g} \dot{\phi}_0^2$$

$$\Rightarrow \phi_m = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{l}{4g}} |\dot{\phi}_0|\right)$$

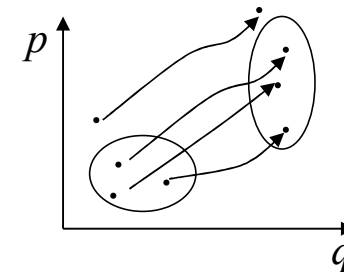
Własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

- 1) Gdy liczba stopni swobody $f=1$ i $\partial H/\partial t=0$ to $H=\text{const}$ i wartość H zwykle równa energii wyznacza w pełni krzywą będącą trajektorią ruchu. Trajektoria ta stanowi 1 wymiarową hiperpowierzchnię w 2 wymiarowej przestrzeni fazowej. Gdy ruch jest ograniczony w przestrzeni fazowej to krzywa jest zamknięta i jest to ruch okresowy.
- 2) Gdy $f>1$ to trajektoria zwykle nie jest krzywą zamkniętą i nie jest w pełni określona przez energię. Wiadomo tylko że jeżeli $\partial H/\partial t=0$ to leży ona na $2f-1$ wymiarowej hiperpowierzchni określonej przez wartość $H=\text{const}$.
- 3) Ogólnie znajomość m niezależnych izolujących całek ruchu o postaci $F(q,p)=\text{const}$ (łącznie z energią) ogranicza ruch w przestrzeni fazowej do hiperpowierzchni $k=2f-m$ wymiarowej. Wybór hiperpowierzchni zależy od wartości całek ruchu.
- 4) W ogólnym przypadku ruch nie musi być okresowy. Gdy jednak ruch układu odbywa się w ograniczonym obszarze przestrzeni fazowej to układ wraca dowolnie blisko punktu początkowego po skończonym czasie ruchu o ile funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu (**twierdzenie Poincarego o powrocie**) i ruch może mieć charakter quasi-okresowy.
- 5) Ograniczenie toru do hiperpowierzchni jednowymiarowej występuje dla dowolnych warunków początkowych ruchu tylko gdy znanych jest $2f-1$ niezależnych całek ruchu (razem z energią). Wówczas w przypadku ruchu odbywającego się w skończonym obszarze w przestrzeni rzeczywistej tor w przestrzeni fazowej ma postać krzywej zamkniętej i ruch jest okresowy. Przykłady ruchów o $f>1$ i torze w postaci krzywej zamkniętej tworzącej 1 wymiarową hiperpowierzchnię
 - a) oscylator izotropowy o $f=3$ (5 niezależnych całek ruchu: energie związane z ruchem wzdłuż dwóch prostopadłych osi i trzy składowe wektora momentu pędu)
 - b) ruch pod wpływem siły centralnej o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości od centrum siły (5 niezależnych całek ruchu: energia, trzy składowe wektora momentu pędu i jedna składowa wektora Rungego-Lenza).

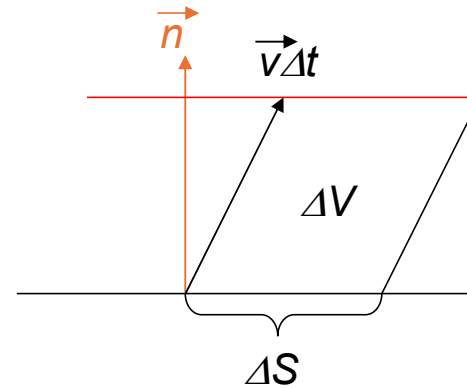
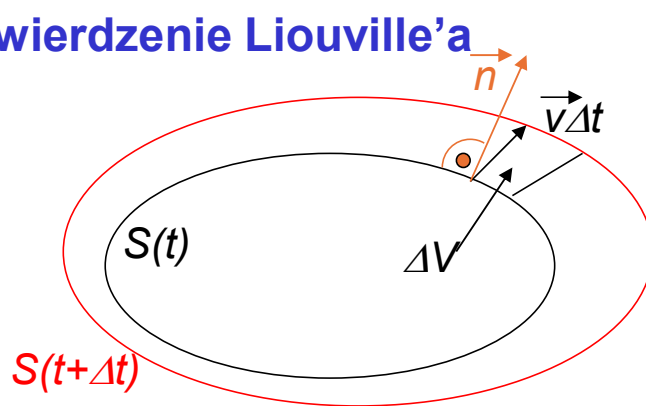
Własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej-kontynuacja

- 6) W przypadku układów opisywanych równaniami nieliniowymi kształt trajektorii zwykle silnie zależy od warunków początkowych ruchu i gdy $f > 1$ może pojawić się zachowanie chaotyczne nawet wówczas gdy $\partial H / \partial t = 0$.
- 7) Trajektorie ruchu układów różniących się warunkami początkowymi ruchu nigdy się nie przecinają **w ustalonej chwili czasu** i przez dany punkt w przestrzeni fazowej przechodzi także tylko jedna trajektoria. Gdy opisująca układ funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu sytuacja taka zachodzi dla dowolnego czasu i obraz trajektorii nie zmienia się w czasie. Często analizujemy ich przecięcia z odpowiednimi powierzchniami w przestrzeni fazowej, na których niekiedy umieszczamy tylko punkty odpowiadające stanowi układu w regularnych odstępach czasu (przekroje Poincaré).
- 8) Gdy dla analizowanych układów możemy wprowadzić funkcje Hamiltona (czyli siły działające można zapisać przy pomocy potencjału lub potencjału uogólnionego) to objętość w przestrzeni fazowej zajmowanej przez jednakowe układy różniące się warunkami początkowymi ruchu (wartością współrzędnych uogólnionych i pędów z nimi sprzężonych określonych w chwili początkowej ruchu) nie ulega zmianie w trakcie ruchu tych układów (nawet wówczas gdy funkcja Hamiltona zależy jawnie od czasu) **(twierdzenie Liouville'a, które pozwala na udowodnienie twierdzenia Poincarégo o powrocie)**

Objętość ta ograniczona jest przez powierzchnie określoną przez punkty reprezentujące w przestrzeni fazowej jednakowe układy o określonych warunkach początkowych ruchu. W trakcie ruchu żaden punkt reprezentujący układ z wnętrza tej objętości jak i spoza tej objętości nie może przekroczyć tej powierzchni, a zatem ciecz złożona z takich punktów zachowuje się jak ciecz nieściśliwa.



Twierdzenie Liouville'a



ΔV -Elementarny przyrost objętości zajmowanej przez ciecz fazową

Rozważamy przestrzeń fazową dla układu dla którego można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony, opisanego zmiennymi (q, p) , oraz zbiór warunków początkowych w chwili t , zawartych wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią $S(t)$ o objętości V_{tot} . Zmiana całkowitej

objętości w czasie Δt

$$\Delta V_{tot} = \sum_{\text{wszystkie } \Delta S} \Delta S \vec{n} \cdot \vec{v} \Delta t \Rightarrow \frac{dV_{tot}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{tot}}{\Delta t} = \oint_S dS \vec{n} \cdot \vec{v} = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Z tw. Gaussa $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV$

Strumień wektora przez powierzchnie zamkniętą jest równy całce z dywergencji tego wektora po objętości ograniczonej przez tę powierzchnie

Prędkość przemieszczania się po trajektorii fazowej

$$\vec{v} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_f) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_f} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_l \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_l} + \frac{\partial \dot{p}_l}{\partial p_l} \right) = \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} \right) + \frac{\partial}{\partial p_l} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_l} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{dV_{tot}}{dt} = 0$$

Objętość dowolnego obszaru, przemieszczającego się w przestrzeni fazowej wzdłuż trajektorii fazowych jest stała (ciecz fazowa zachowuje się jak ciecz nieściśliwa)

Twierdzenie Liouville'a-przykład

Rozważmy ruch ciała o masie m na ruch którego nie nałożono więzów w polu siły ciężkości z osią Oz skierowaną pionowo w dół w przestrzeni jednowymiarowej

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mgz$

Pęd uogólniony $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$

Funkcja Hamiltona

$$H(z, p_z) = T + V = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz = \frac{p_z^2}{2m} - mgz = E = \text{const}$$

Trajektoria ruchu w przestrzeni fazowej z, p_z

$$p_z^2 = 2m(E + mgz) \Rightarrow p_z^2 - 2m^2gz - 2mE = 0 \quad \text{parabola zależna od } E$$

Równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \longrightarrow \dot{z} = gt + \frac{p_{0z}}{m} \rightarrow z = \frac{gt^2}{2} + \frac{p_{0z}t}{m} + z_0 \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = mg \Rightarrow p_z = mgt + p_{0z} \end{aligned}$$

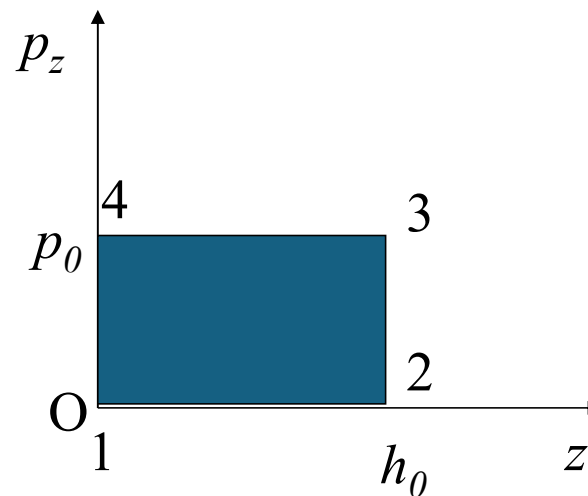
$p_{0z} = p_z(t=0)$
 $z_0 = z(t=0)$

$$z = \frac{gt^2}{2} + \frac{p_{oz}t}{m} + z_0 \quad p_z = mgt + p_{oz} \quad \begin{matrix} p_{oz} = p_z(t=0) \\ z_0 = z(t=0) \end{matrix}$$

I) Przyjmujemy następujące warunki początkowe ruchu w chwili $t=0$

- 1) $z_1(t=0)=0, p_{1z}(t=0)=0$
- 2) $z_2(t=0)=h_0, p_{2z}(t=0)=0$
- 3) $z_3(t=0)=h_0, p_{3z}(t=0)=p_0$
- 4) $z_4(t=0)=0, p_{4z}(t=0)=p_0$

Objętość w przestrzeni fazowej zajmowanej przez układy ograniczone przez powyższe warunki początkowe jest dla $t=0$ polem prostokąta o długościach boków h_0 i p_0 i powierzchni $S(t=0) = p_0 h_0$



II) Określamy położenie układów w przestrzeni fazowej w chwili $t_k > 0$

$$\begin{aligned} \text{Ad 1)} \quad z_1(t=t_k) &= \frac{gt_k^2}{2} & p_{z1}(t=t_k) &= mgt_k \\ \text{Ad 2)} \quad z_2(t=t_k) &= \frac{gt_k^2}{2} + h_0 & p_{z2}(t=t_k) &= mgt_k \\ \text{Ad 3)} \quad z_3(t=t_k) &= \frac{gt_k^2}{2} + \frac{p_0 t_k}{m} + h_0 & p_{z3}(t=t_k) &= mgt_k + p_0 \\ \text{Ad 4)} \quad z_4(t=t_k) &= \frac{gt_k^2}{2} + \frac{p_0 t_k}{m} & p_{z4}(t=t_k) &= mgt_k + p_0 \end{aligned}$$

$$z_1(t=t_k) = \frac{gt_k^2}{2} \quad p_{z1}(t=t_k) = mgt_k \quad z_2(t=t_k) = \frac{gt_k^2}{2} + h_0 \quad p_{z2}(t=t_k) = mgt_k$$

$$z_3(t=t_k) = \frac{gt_k^2}{2} + \frac{p_0 t_k}{m} + h_0 \quad p_{z3}(t=t_k) = mgt_k + p_0$$

$$z_4(t=t_k) = \frac{gt_k^2}{2} + \frac{p_0 t_k}{m} \quad p_{z4}(t=t_k) = mgt_k + p_0$$

Objętość w przestrzeni fazowej zajmowanej przez układy ograniczone przez przyjęte warunki początkowe jest dla $t=t_k$ polem trapezu o jednakowej długości podstaw

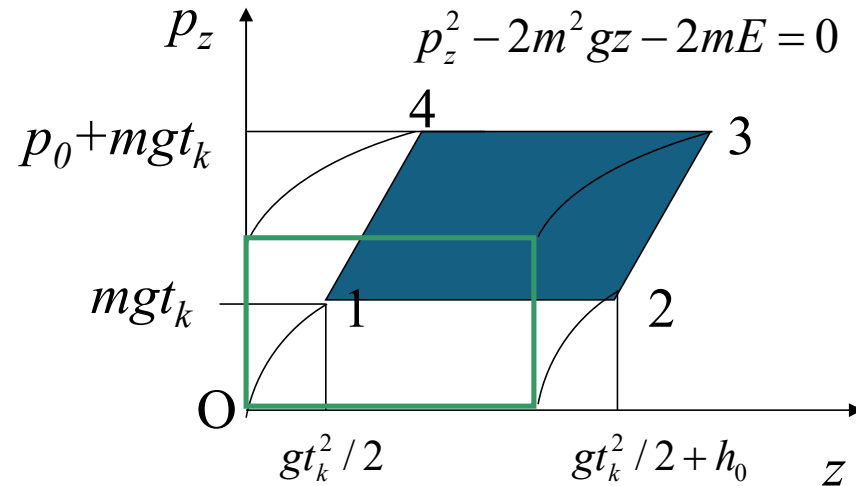
$$a = z_2(t=t_k) - z_1(t=t_k) = h_0 \quad b = z_3(t=t_k) - z_4(t=t_k) = h_0$$

oraz wysokości

$$H = p_{z4}(t=t_k) - p_{z1}(t=t_k) = p_{z3}(t=t_k) - p_{z2}(t=t_k) = p_0$$

i polu powierzchni

$$S(t=t_k) = \frac{a+b}{2} H = h_0 p_0 = S(t=0)$$



Związek mechaniki z twierdzeniem ergodycznym (stosowanym dla zespołu statystycznego złożonego z układów nie wymieniających energii z otoczeniem)

Zakładamy iż $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ i $H=E=\text{const}$. Rozważamy wielkość zależną od położenia punktu reprezentującego układ w przestrzeni fazowej $X(q,p)$.

Określamy średnią wartość tej wielkości ze wzoru $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(q(t), p(t)) dt$ (*)

licząc całkę po trajektorii w przestrzeni fazowej po której porusza się układ

Zakładamy iż nie ma całek izolujących $F(q,p)=\text{const}$ (oprócz energii) a więc układ o f stopniach swobody porusza się po hiperpowierzchni $2f-1$ wymiarowej o stałej energii w przestrzeni fazowej (warunek trudny do potwierdzenia)

Wówczas dla prawie wszystkich trajektorii wartość średnią wielkości X określoną ze wzoru (*) (dla odpowiednio dużego T) można oszacować licząc średnią wartość tej wielkości po wszystkich punktach hiperpowierzchni o stałej energii

$$\langle X \rangle = \frac{1}{V} \int X(q, p) dV(q, p)$$

$dV(q,p)$ - miara objętości części hiperpowierzchni przestrzeni fazowej dla której przyjmujemy iż q i p mają określone wartości

V –objętość rozważanej hiperpowierzchni w przestrzeni fazowej

Dowód opiera się m.in. na tym iż ciecza fazowa jest nieściśliwa (tw. Liouville'a) oraz tym iż z twierdzenia Poincarego o powrocie wynika iż prawie wszystkie trajektorie leżące na rozważanej hiperpowierzchni przechodzą w skończonym czasie nieskończenie blisko wszystkich punktów leżących na tej hiperpowierzchni

Dodatek dla zainteresowanych. Analiza ruchu wahadła przy założeniu iż w chwili początkowej znajdowało się w najniższym punkcie na okręgu

1) Zakładamy iż energia ciała jest większa od energii potencjalnej w najwyższym punkcie na okręgu gdy $\varphi = \pi$. Oznacza to iż

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} - mgl \cos(\varphi_0 = 0) > -mgl \cos(\varphi = \pi) \Rightarrow |\dot{\varphi}_0| > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

gdzie $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(t = 0)$

Równanie ruchu wynikające z zasady zachowania energii przyjmuje postać

$$\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos(\varphi) = E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} - mgl \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - \frac{2g}{l}(1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left[1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Ponieważ $\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} < 1$ to $\dot{\varphi}$ nie zmienia znaku w trakcie całego ruchu, znak ten

zależy tylko od znaku $\dot{\varphi}_0$

Ciało przechodzi przez najwyższy punkt na okręgu nie zawracając

Równanie ruchu przyjmuje postać $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Wprowadzając nową zmienną $u = \frac{\varphi}{2}$ i oznaczenie $\tilde{k} = \sqrt{\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2}}$ równanie ruchu przyjmuje postać

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \Rightarrow 2\dot{u} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2(u)}$$

Rozwiązując go metodą rozdzielania zmiennych i uwzględniając to iż $u(t=0)=0$ mamy

$$\int_0^{\varphi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2(u)}} = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} \int_0^t dt \Rightarrow \int_0^{\varphi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2(u)}} = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} t$$

Całka występująca po lewej stronie to całka eliptyczna pierwszego rodzaju w postaci Legendre'a $F\left(\tilde{k}, u = \frac{\varphi}{2}\right)$. Funkcją odwrotną do niej jest funkcja zwana amplitudą i

oznaczana am $F(\tilde{k}, u) = b \Rightarrow u = am(b)$

A zatem $F\left(\tilde{k}, u = \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} t \Rightarrow \varphi(t) = 2am\left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2} t\right)$

Można pokazać że $am\left(\xi + 2nF\left(\tilde{k}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = am(\xi) + n\pi \Rightarrow am\left(\xi + 2F\left(\tilde{k}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = am(\xi) + \pi$

a zatem okres po którym ruch się powtarza T (po którym ciało wraca do punktu początkowego bo kąt zmienia się o 2π) można określić z relacji

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{2} T = 2F\left(\tilde{k}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T = \frac{4}{\dot{\varphi}_0} F\left(\tilde{k}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Okres ten maleje ze wzrostem } \dot{\varphi}_0$$

2) Zakładamy iż energia ciała jest mniejsza od energii potencjalnej w najwyższym punkcie na okręgu gdy $\varphi = \pi$. Oznacza to iż

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} - mgl \cos(\varphi_0 = 0) < -mgl \cos(\varphi = \pi) \Rightarrow |\dot{\varphi}_0| < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Równanie ruchu podobnie jak w punkcie 1) przyjmuje postać

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left[1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Ponieważ $\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} > 1$ to $\dot{\varphi}$ zmienia znak w trakcie ruchu, ciało wykonuje drgania

wokół najniższego punktu na okręgu

Wprowadzamy nową zmienną u w ten sposób iż $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = k \sin(u)$ gdzie $k = \sqrt{\frac{l\dot{\varphi}_0^2}{4g}} < 1$

Po zrózniczkowaniu zupełnie po czasie relacji definiującej u otrzymujemy poniższe równanie

$$\frac{\dot{\varphi}}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = k \cos(u) \dot{u}$$

A zatem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\frac{\dot{\varphi}}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{k \cos(u)} \Rightarrow \dot{u}^2 = \frac{\left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{k^2 \cos^2(u)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2 \frac{1 - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2(u)} = \\ &= \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2 \frac{1 - k^2 \sin^2(u)}{\cos^2(u)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2 \frac{1 - k^2 \sin^2(u)}{1 - \sin^2(u)} \end{aligned}$$

Uwzględniając równanie ruchu $\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 \left[1 - \frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \dot{\varphi}_0^2 \left[1 - \frac{1}{k^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = \dot{\varphi}_0^2 [1 - \sin^2(u)]$

dostajemy

$$\dot{u}^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{2} \right)^2 \frac{1 - k^2 \sin(u)}{1 - \sin^2(u)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2} \right)^2 (1 - \sin^2 u) \frac{1 - k^2 \sin(u)}{1 - \sin^2(u)} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2} \right)^2 (1 - k^2 \sin(u)) = \tilde{\omega}^2 (1 - k^2 \sin(u))$$

gdzie $\tilde{\omega} = \frac{\dot{\varphi}_0}{2k}$

Ponieważ $k < 1$ to znak $\dot{u}$ nie zmienia się w trakcie ruchu i można zapisać poniższe równanie

$$\dot{u} = \tilde{\omega} \sqrt{1 - k^2 \sin(u)}$$

Rozwiązując powyższe równanie metodą rozdzielania zmiennych

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} = \tilde{\omega} \int_0^t dt \Rightarrow \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} = \tilde{\omega} t$$

$$F(k, u) = \tilde{\omega} t \Rightarrow u(t) = am(\tilde{\omega} t)$$

F -całka eliptyczna pierwszego rodzaju w postaci Legendrea'a
 am -amplituda

Ostatecznie

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = k \sin(u) \Rightarrow \varphi = 2 \arcsin(k \sin(u)) = 2 \arcsin(k \sin(am(\tilde{\omega} t)))$$

3) Zakładamy iż energia ciała jest równa energii potencjalnej w najwyższym punkcie na okręgu gdy $\varphi = \pi$. Oznacza to iż $E = -mgl \cos(\theta = \pi) = mgl$

Równanie wyrażające zasadę zachowania energii przyjmuje postać

$$\left[\frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos(\varphi) \right] = mgl \Rightarrow \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} = mgl[1 + \cos(\varphi)] \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{Przy czym dla } \varphi(t=0)=0 \text{ mamy } \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Ponieważ w trakcie ruchu $-\pi < \varphi < \pi$ a zatem $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) > 0$ to $\dot{\varphi}$ nie zmienia znaku i zależy tylko od warunków początkowych ruchu

A zatem

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \varphi(t=0)=0, \dot{\varphi}_0 = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Stosując metodę rozdzielania zmiennych do rozwiązania powyższego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} &= \dot{\varphi}_0 \int_0^t dt \Rightarrow 2 \left\{ \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) \right] \right\} \Big|_0^\varphi = \dot{\varphi}_0 t \Rightarrow 2 \left\{ \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) \right] \right\} = \dot{\varphi}_0 t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{\dot{\varphi}_0 t}{2} \right) \right] - \pi = \\ \int \frac{d\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} &= \int \frac{d\varphi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \int \frac{d\varphi}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right)} = \\ &= 2 \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) \right] \\ &= 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\pm \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \right] - \pi \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pm \pi \end{aligned}$$