- Równania Hamiltona-Jacobiego

Metoda Hamiltona-Jacobiego stanowi metodę wyznaczenie ruchu w przestrzeni fazowej w której rozwiązanie układu 2*f* równań różniczkowych zwyczajnych sprowadzamy do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego.
Jest ona oparta o wykorzystanie transformacji kanonicznych:

$$q_l \to Q_l(q,p,t) \qquad p_l \to P_l(q,p,t)$$

$$q_l = q_l(Q,P,t), \qquad p_l = p_l(Q,P,t), \qquad l = 1,2,\ldots,f$$

prowadzących do zmiennych *Q,P* , z których żadna nie występuje w funkcji Hamiltona po transformacji ; można założyć iż funkcja Hamiltona w nowych zmiennych jest tożsamościowo równa zeru $\overline{H}(Q,P,t) \equiv 0$

Równania Hamiltona w nowych zmiennych i jego rozwiązania

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_l} = 0 \qquad\qquad Q_l = \text{const} = \alpha_l$$

$$\qquad l = 1,2,\ldots,f \quad \Rightarrow$$

$$\dot{P}_l = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_l} = 0 \qquad\qquad P_l = \text{const} = \beta_l$$

stałe całkowania

Jak widać współrzędne i pędy po transformacji są stałymi ruchu.
Wstawiając powyższe rozwiązania do wzorów definiujących transformację kanoniczną, otrzymujemy ruch fazowy układu w zmiennych *q, p* w zależności od 2f stałych dowolnych α_l, β_l, $l = 1,2,\ldots,f$

$$q_l = q_l(\alpha,\beta,t), \qquad p_l = p_l(\alpha,\beta,t) \qquad l = 1,2,\ldots,f$$

Stałe dowolne wyznaczamy z warunków początkowych

$$q_l(\alpha,\beta,t_0) = q_{l0}, \quad p_l(\alpha,\beta,t_0) = p_{l0}, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

Problem całkowania równań Hamiltona sprowadza się więc do znalezienia transformacji kanonicznej, prowadzącej do zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona, a w zasadzie do znalezienia funkcji tworzącej *S(q,P,t)* opisującej tą transformacje kanoniczna. Spełnia ona relacje

$$p_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f \quad \text{gdzie} \quad \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l} \right| \neq 0$$

oraz relacje

$$\overline{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} = 0$$

Wstawiając do powyższego równania w miejsce pędów uogólnionych p_l ich definicje przy pomocy funkcji tworzącej transformacji kanonicznej, otrzymujemy równanie z którego możemy wyznaczyć funkcje tworzącą

$$\boxed{H\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Równanie Hamiltona - Jacobiego

Wówczas

$$Q_l = \alpha_l,\; P_l = \beta_l \Rightarrow p_l = \frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial q_l}, \quad \alpha_l = \frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial \beta_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

Rozwiązując powyższe równania względem *q, p* dostajemy ruch fazowy układu

$$q_l = q_l(\alpha,\beta,t) \qquad l = 1,2,\ldots,f$$
$$p_l = p_l(\alpha,\beta,t)$$

Do wyznaczenia ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej wystarcza równanie

Równanie Hamiltona - Jacobiego

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Rozwiązanie powyższego równania , zależne od stałych dowolnych, w liczbie równej liczbie zmiennych niezależnych, nazywa się **całką zupełną równania Hamiltona - Jacobiego**. Zmiennymi niezależnymi są q_1, q_2, ..., q_f, t, więc będzie f+1 stałych dowolnych.
Jednak równanie Hamiltona-Jacobiego zawiera tylko pochodne funkcji S, więc funkcję S można wyznaczyć tylko z dokładnością do stałej addytywnej. Stąd wynika, że jedna ze stałych dowolnych będzie stałą addytywną.
Całka zupełna równania Hamiltona - Jacobiego ma postać

$$S = \tilde{S}\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_f, t\right) + C,$$

β_1, β_2, ..., β_f, C - stałe dowolne

Zakładamy iż

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial P_l}\right| \neq 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q_k \partial \beta_l}\right| \neq 0$$

Twierdzenie Hamiltona-Jacobiego

Związki

$$p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l}, \quad \alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f \qquad (*)$$

w których

$$S = \tilde{S}\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_f, t\right) + C$$

jest całką zupełną równania Hamiltona-Jacobiego, zaś α_l, β_l l = 1,2,...,*f* są stałymi dowolnymi, wyznaczanymi z warunków początkowych

$$q_l(\alpha, \beta, t_0) = q_{l0}, \quad p_l(\alpha, \beta, t_0) = p_{l0}, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

przedstawiają w formie uwikłanej rozwiązanie równań kanonicznych Hamiltona.

W oparciu o twierdzenie Hamiltona-Jacobiego rozwiązywanie problemów mechanicznych sprowadza się do znajdowania całki zupełnej równania Hamiltona - Jacobiego. Wstawiając ją do (*) i rozwiązując ten układ względem *q, p* otrzymujemy ruch fazowy układu punktów materialnych w zależności od 2*f* stałych dowolnych, które wyznaczamy z warunków początkowych.

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona

Separacja czasu

Niech $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = const \overset{ozn.}{=} E$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Podstawiamy $S = S_0(q_1, q_2, \ldots, q_f) - Et \Rightarrow H\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E \quad (*)$

gdzie S_o- skrócona funkcja tworząca

Rozwiązanie (*) zależy od f stałych dowolnych E, β_2, β_3,...,β_f, C (gdzie C jest stałą addytywną)

$$S_0 = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \ldots, q_f, E, \beta_2, \ldots, \beta_f) + C \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \ldots, q_f, E, \beta_2, \ldots, \beta_f) - Et + C,$$

Wprowadzając stałą β_1 i podstawiając za E pewną określoną funkcję β_1, β_2,...,β_f, otrzymujemy

$$E = E(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_f) \Rightarrow S = \tilde{S}_0(q_1, q_2, \ldots, q_f, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_f) - E(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_f)t + C$$

Ruch układu w przestrzeni fazowej otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l}t \qquad p_l = \frac{\partial S}{\partial q_l} = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q_l} \qquad l = 1,2,\ldots,f$$

Separacja zmiennych nie występujących w funkcji Hamiltona
Separacja współrzędnych cyklicznych

Niech $\frac{\partial H}{\partial q_r}=0$ W tym przypadku dokonujemy podstawienia

$$S=S_1\left(q_1,q_2,\ldots,q_{r-1},q_{r+1},\ldots,q_f,t\right)+\beta_r q_r \Rightarrow$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$H\left(q_1,q_2,\ldots,q_{r-1},q_{r+1},\ldots,q_f,\frac{\partial S_1}{\partial q_1},\frac{\partial S_1}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial S_1}{\partial q_{r-1}},\beta_r,\frac{\partial S_1}{\partial q_{r+1}},\ldots,\frac{\partial S_1}{\partial q_f},t\right)+\frac{\partial S_1}{\partial t}=0$$

Całka zupełna równania Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$S=S_1+\beta_r q_r=\tilde{S}_1\left(q_1,q_2,\ldots,q_{r-1},q_{r+1},\ldots,q_f,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r,\ldots,\beta_f,t\right)+\beta_r q_r+C$$

Ruch układu otrzymujemy więc z równań

$$\begin{cases} p_l=\dfrac{\partial S}{\partial q_l}=\dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial q_l}\ (l\neq r) & \alpha_l=\dfrac{\partial S}{\partial \beta_l}=\dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \beta_l}\ (l\neq r) \\ p_r=\dfrac{\partial S}{\partial q_r}=\beta_r & \alpha_r=\dfrac{\partial S}{\partial \beta_r}=\dfrac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \beta_r}+q_r \end{cases}$$

Zmienne separowalne

W równaniu Hamiltona-Jacobiego zmienne są separowalne, jeżeli całka zupełna ma postać

$$S = S_0(q_1, q_2, \ldots, q_f) - Et \qquad \text{gdzie} \qquad S_0 = \sum_{l=1}^{f} S_l(q_l) \quad (*)$$

co ma miejsce gdy funkcja Hamiltona ma postać $H = H\left(F_1(q_1, p_1), \ldots, F_f(q_f, p_f)\right)$

W najprostszym przypadku $H = \sum_{l=1}^{f} F_l(q_l, p_l)$

W powyższym przypadku zmienne są separowalne, o czym można się przekonać, dokonując podstawienia(*). Skrócone równanie Hamiltona Jacobiego

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f}\right) = E \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{f} F_l\left(q_l, \frac{\partial S_l}{\partial q_l}\right) = E$$

rozpada się na układ *f* równań różniczkowych zwyczajnych

$$F_l\left(q_l, \frac{dS_l}{dq_l}\right) = E_l, \qquad l = 1,2,\ldots, f, \qquad \sum_{l=1}^{f} E_l = E \qquad E_l = E_l(\beta_l) \overset{np.}{=} \beta_l$$

Całka zupełna równania Hamiltona Jacobiego jest sumą *f* całek zupełnych S_l powyższych równań i można uwzględniając to iż $S_l = \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C_l,\ l = 1,2,\ldots, f$ *zapisać je w postaci*

$$S = \sum_{l=1}^{f} \tilde{S}_l(q_l, \beta_l) + C - Et \qquad gdzie \qquad C = \sum_{l=1}^{f} C_l$$

Wyznaczenie ruchu trójwymiarowego oscylatora harmonicznego przy pomocy równania Hamiltona-Jacobiego

Funkcja Hamiltona dla rozważanego zagadnienia

$$H = T(p_x, p_y, p_z) + V(x, y, z) = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Separacja czasu

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow S = S_0\left(x, \beta_x, y, \beta_y, z, \beta_z, C\right) - Et = \tilde{S}_0\left(x, \beta_x, y, \beta_y, z, \beta_z\right) - Et + C$$

$E = E\left(\beta_x, \beta_y, \beta_z\right)$, C-stała addytywna

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2 = E$$

$$\alpha_l = \frac{\partial S\left(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z\right)}{\partial \beta_l} \Rightarrow \alpha_l = \frac{\partial \tilde{S}_0\left(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z\right)}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E\left(\beta_x, \beta_y, \beta_z\right)}{\partial \beta_l}t$$

$l = x, y, z$

Separacja zmiennych *x,y,z*

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=E \qquad (**)$$

$$H=F_x(x,p_x)+F_y(y,p_y)+F_z(z,p_z)\Rightarrow \quad S_0=S_{0x}(x)+S_{0y}(y)+S_{0z}(z)$$

Można pokazać iż równanie (**) jest równoważne 3 równaniom (patrz dodatek)

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x}\right)^2+\frac{k_x}{2}x^2=E_x \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y}\right)^2+\frac{k_y}{2}y^2=E_y \qquad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2+\frac{k_z}{2}z^2=E_z$$

Przy czym zachodzi $\quad E_x+E_y+E_z=E$

Stałe o wymiarze energii E_x, E_y, E_z odgrywają rolę stałych β_x,β_y,β_z A zatem

$$S_{0x}=\tilde{S}_{0x}(x,\beta_x=E_x)+C_x \qquad S_{oy}=\tilde{S}_{0y}(y,\beta_y=E_y)+C_y \qquad S_{0z}=\tilde{S}_{0z}(z,\beta_z=E_z)+C_z$$

$$C=C_x+C_y+C_z$$

$$\alpha_x=\frac{\partial\tilde{S}_{0x}}{\partial E_x}-\frac{\partial E}{\partial E_x}t=\frac{\partial\tilde{S}_{0x}}{\partial E_x}-t$$

$$\alpha_l=\frac{\partial\tilde{S}_0(x,y,z,\beta_x,\beta_y,\beta_z)}{\partial\beta_l}-\frac{\partial E}{\partial\beta_l}t\Rightarrow\alpha_y=\frac{\partial\tilde{S}_{0y}}{\partial E_y}-\frac{\partial E}{\partial E_y}t=\frac{\partial\tilde{S}_{0y}}{\partial E_y}-t$$

$$\alpha_z=\frac{\partial\tilde{S}_{0z}}{\partial E_z}-\frac{\partial E}{\partial E_z}t=\frac{\partial\tilde{S}_{0z}}{\partial E_z}-t$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x}\right)^2+\frac{k_x}{2}x^2=E_x\Rightarrow\left(\frac{dS_{0x}}{dx}\right)=\pm\sqrt{2m\left(E_x-\frac{k_x}{2}x^2\right)}\Rightarrow dS_{0x}=\pm\sqrt{2m\left(E_x-\frac{k_x}{2}x^2\right)}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{0x}=\pm\int\sqrt{2m\left(E_x-\frac{k_x}{2}x^2\right)}dx+C_x\Rightarrow\tilde{S}_{0x}=S_{ox}-C_x=\pm\int\sqrt{2m\left(E_x-\frac{k_x}{2}x^2\right)}dx$$

$$\alpha_x=\frac{\partial\tilde{S}_{0x}}{\partial E_x}-t\Rightarrow\alpha_x=\pm\int\frac{m}{\sqrt{2m\left(E_x-\frac{k_x}{2}x^2\right)}}dx-t=\pm\sqrt{\frac{m}{k_x}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{k_x}{2E_x}}x\right)-t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{k_x}{m}}(\alpha_x+t)=\pm\arcsin\left(\sqrt{\frac{k_x}{2E_x}}x\right)\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2E_x}{k_x}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_x}{m}}(\alpha_x+t)\right)$$

Podobnie można pokazać iż

$$\left(\frac{dS_{0y}}{dy}\right)=\pm\sqrt{2m\left(E_y-\frac{k}{2}y^2\right)}\Rightarrow\tilde{S}_{0y}=\pm\int\sqrt{2m\left(E_y-\frac{k_y}{2}y^2\right)}dy\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2E_y}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_y}{m}}(\alpha_y+t)\right)$$

$$\left(\frac{dS_{0z}}{dz}\right)=\pm\sqrt{2m\left(E_z-\frac{k_z}{2}z^2\right)}\Rightarrow\tilde{S}_{0z}=\pm\int\sqrt{2m\left(E_z-\frac{k_z}{2}z^2\right)}dz\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{2E_z}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_z}{m}}(\alpha_z+t)\right)$$

Dodatek: Analiza równania $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=E$$

$$S_0=S_{0x}(x)+S_{0y}(y)+S_{0z}(z)\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=E$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2=E-\frac{k_y}{2}y^2-\frac{k_z}{2}z^2-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]$$

Równanie to , którego obie strony zależą od innych zmiennych, będzie spełnione gdy jego obie strony są równe stałej, którą można oznaczyć jako E_x. Otrzymujemy w ten sposób dwa równania

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0x}}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2=E_x \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=E-E_x \qquad (*)$$

Przekształcając równanie (*) otrzymujemy $$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{k_y}{2}y^2=E-E_x-\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{k_z}{2}z^2$$

Równanie to , którego obie strony zależą od innych zmiennych, będzie spełnione gdy jego obie strony są równe stałej, którą można oznaczyć jako E_y. Otrzymujemy w ten sposób dwa równania

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0y}}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{k_y}{2}y^2=E_y \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_z}{2}z^2=E-E_x-E_y \qquad (**)$$

Wprowadzają oznaczenie $E_z = E - E_x - E_y$

równanie (**) można przepisać w postaci

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_{0z}}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_z}{2}z^2=E_z \qquad (3)$$

Widać iż wyjściowe równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{k_x}{2}x^2+\frac{k_y}{2}y^2+\frac{k_z}{2}z^2=E$$

jest równoważne równaniom różniczkowym zwyczajnym (1), (2) i (3) przy spełnieniu relacji dodatkowej $E = E_x + E_y + E_z$ przy czym $S_0 = S_{0x}(x) + S_{0y}(y) + S_{0z}(z)$

Równanie Hamiltona-Jacobiego dla cząstki poruszającej się w potencjale zależnym tylko od odległości od początku układu współrzędnych we współrzędnych sferycznych *$V=V(r)$* *(do samodzielnej analizy)*

Wyznaczenie funkcji Lagrange'a.

Za współrzędne uogólnione przyjmujemy współrzędne w układzie sferycznym

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$L(r,\theta,\dot r,\theta,\dot\varphi) = T - V = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) - V = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) - V(r)$$

gdzie składowe prędkości w układzie sferycznym $\quad v_r = \dot r \qquad v_\theta = r\dot\theta \qquad v_\varphi = r\sin\theta\dot\varphi$

Pędy uogólnione

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \Rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m} \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\dot\varphi \Rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$$

Ponieważ siły są potencjalne i związki miedzy współrzędnymi kartezjańskimi i uogólnionymi nie zawierają czasu explicite to

$$G(r,\theta,\dot r,\dot\theta,\dot\varphi) = E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) + V(r)$$

$$H = G(r,\theta,p_r,p_\theta,p_\varphi) = \frac{m}{2}\left[\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2r^4} + r^2\sin^2\theta\frac{p_\varphi^2}{m^2r^4\sin^4\theta}\right] + V(r) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + V(r)$$

Funkcja Hamiltona dla rozważanego zagadnienia

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right] + V(r)$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{r^2 \sin^2\theta} \right] + V(r) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Separacja czasu

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow S = S_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi, C) - Et = \tilde{S}_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi) - Et + C$$

$$E = E(\beta_r, \beta_\theta, \beta_\varphi)$$, C-stała addytywna

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2}{r^2 \sin^2\theta} \right] + V(r) = E \qquad \alpha_l = \frac{\partial \tilde{S}_0(r, \beta_r, \theta, \beta_\theta, \varphi, \beta_\varphi)}{\partial \beta_l} - \frac{\partial E}{\partial \beta_l} t$$

$$l = r, \theta, \varphi$$

$\alpha_l(\beta_l)$ -nowe współrzędne (pędy) po transformacji kanonicznej

Separacja zmiennych

a) zmienna cykliczna φ

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow S_0(r,\theta,\varphi)=\tilde{\tilde{S}}_0(r,\theta)+S_\varphi(\varphi)=\tilde{\tilde{S}}_0(r,\theta)+\beta_\varphi \varphi$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2}{r^2}+\frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r)=E \Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial \theta}\right)^2}{r^2}+\frac{\beta_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r)=E$$

Ponieważ $p_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \varphi}=\beta_\varphi$ oraz $p_\varphi=L_z$ to stała β_φ ma sens stałej wartości składowej z-towej momentu pędu

b) zmienne r,θ

$$\tilde{\tilde{S}}_0(r,\theta)=S_r(r)+S_\theta(\theta)$$

(próba, prowadząca do sukcesu, co świadczy o separowalności zmiennych)

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial \tilde{\tilde{S}}_0}{\partial \theta}\right)^2}{r^2}+\frac{\beta_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r)=E \Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2}{r^2}+\frac{\beta_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r)=E$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2}{r^2}+\frac{\beta_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]+V(r)=E$$

$$r^2\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}=2m\big(E-V(r)\big)r^2$$

$$\left[\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right]=\left[2m\big(E-V(r)\big)-\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2\right]r^2$$

Ponieważ obie strony powyższego równania zależą od innych zmiennych to muszą być one równe stałej. Możemy ją oznaczyć jako kwadrat β_θ. Z równania tego wynikają więc dwa równania

$$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\beta_\theta{}^2 \qquad \left[2m\big(E-V(r)\big)-\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2\right]r^2=\beta_\theta^2$$

$$\left[2m\big(E-V(r)\big)-\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2\right]r^2=\beta_\theta^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2=2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\beta_\theta^2}{r^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right]=\beta_\theta{}^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2=\beta_\theta^2-\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}$$

Znalezienie całki ogólnej równania Hamiltona-Jacobiego

$$S=S_r(r)+S_\theta(\theta)+\beta_\varphi\varphi-Et=\tilde{S}_r(r)+\tilde{S}_\theta(\theta)+\beta_\varphi\varphi-Et+C$$

sprowadza się do rozwiązania dwóch równań różniczkowych zwyczajnych

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2=2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\beta_\theta^2}{r^2} \qquad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2=\beta_\theta^2-\frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}$$

Przy czym można przyjąć iż rolę stałej β_r pełni energia E $\qquad E=\beta_r$

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - \beta_r t = \tilde{S}_r(r) + \tilde{S}_\theta(\theta) + \beta_\varphi \varphi - \beta_r t + C \qquad \beta_r = E$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = 2m(\beta_r - V(r)) - \frac{\beta_\theta^2}{r^2} \qquad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 = \beta_\theta^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\sin^2\theta}$$

Z postaci powyższych równań wynika iż $S_r = \tilde{S}_r(r, \beta_r, \beta_\theta) + C_r, \quad S_\theta = \tilde{S}_\theta(\theta, \beta_\theta, \beta_\varphi) + C_\theta$

Równania określające ruch ciała przybierają postać $\quad C = C_r + C_\theta$

$$\alpha_r = \frac{\partial S}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \beta_r} - t \qquad (*)$$

$$\alpha_l = \frac{\partial S}{\partial \beta_l} \Rightarrow \alpha_\theta = \frac{\partial S}{\partial \beta_\theta} = \frac{\partial \tilde{S}_r}{\partial \beta_\theta} + \frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \beta_\theta} \qquad (**)$$

$$\alpha_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \beta_\varphi} = \frac{\partial \tilde{S}_\theta}{\partial \beta_\varphi} + \varphi \qquad (***)$$

Równanie (*) wyznacza zależność *r(t)* w czasie ruchu, zaś pozostałe równania pozwalają na wyznaczenie równania toru

Uwaga. Przeprowadzenie separacji zmiennych jest możliwe w układzie sferycznym także wówczas gdy potencjał ma postać

$$V(\vec{r}) = f(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2(\theta)}$$

Przy tym gdy $\boxed{c(\varphi) \neq 0}$ to φ nie jest współrzędną cykliczną.

Równanie Hamiltona-Jacobiego jako podstawa obliczeń przybliżonych

1) Przedstawiamy pełną funkcje Hamiltona *H(q,p,t)* jako sumę funkcji Hamiltona H_0(q,p,t) dla której znamy rozwiązanie równań ruchu oraz mniejszy człon H_1(q,p,t) opisujący zaburzenie

2) Rozważamy przekształcenie kanoniczne $q_l \to Q_l = \alpha_l, \, p_l \to P_l = \beta_l$ o funkcji tworzącej S(q,β,t) spełniającej równanie Hamiltona –Jacobiego z funkcją Hamiltona H_0

$$H_0\left(q_1,.....,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_1},.....,\frac{\partial S}{\partial q_f},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

prowadzącej do funkcji Hamiltona

$$\overline{H}(\alpha,\beta,t)=H+\frac{\partial S}{\partial t}=H_1+H_0+\frac{\partial S}{\partial t}=H_1(\alpha,\beta,t)$$

przy czym zachodzą relacje

$$p_l=\frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial q_l} \qquad \alpha_l=\frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial \beta_l} \qquad l=1,...,f$$

Nowe współrzędne i pędy spełniają równania ruchu Hamiltona

$$\dot{\alpha}_l=\frac{\partial H_1(\alpha,\beta,t)}{\partial \beta_l} \qquad \dot{\beta}_l=-\frac{\partial H_1(\alpha,\beta,t)}{\partial \alpha_l}$$

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha,\beta,t)}{\partial \beta_l} \qquad \dot{\beta}_l = -\frac{\partial H_1(\alpha,\beta,t)}{\partial \alpha_l} \qquad (*)$$

W przypadku gdyby H_1=0 to α_l, β_l były by stałymi

W rozważanym przypadku gdy H_1 jest małe w pierwszym przybliżeniu można zastąpić powyższy układ równań układem w którym zestaw zmiennych α, β został zastąpiony przez zestaw stałych $\alpha_0 = \alpha(t=0), \beta_0 = \beta(t=0)$

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha_0,\beta_0,t)}{\partial \beta_l} \qquad \dot{\beta}_l = -\frac{\partial H_1(\alpha_0,\beta_0,t)}{\partial \alpha_l}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań poprzez całkowanie

$$\alpha_{1l}(t) = \alpha_l(t=0) + \int_0^t \frac{\partial H_1(\alpha_0,\beta_0,t)}{\partial \beta_l} dt \qquad \beta_{1l}(t) = \beta_l(t=0) - \int_0^t \frac{\partial H_1(\alpha_0,\beta_0,t)}{\partial \alpha_l} dt$$

daje nam przybliżoną wartość zmiennych α_l, β_l w chwili czasu t oznaczoną powyżej przez α_{1l}, β_{1l} ,którą można wykorzystać do sformułowania równań (*) w kolejnym przybliżeniu w postaci

$$\dot{\alpha}_l = \frac{\partial H_1(\alpha_1,\beta_1,t)}{\partial \beta_l} \qquad \dot{\beta}_l = -\frac{\partial H_1(\alpha_1,\beta_1,t)}{\partial \alpha_l}$$

Po określeniu zależności od czasu α_l, β_l zależność pierwotnych zmiennych q,p od czasu możemy wyznaczyć z relacji

$$p_l = \frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial q_l} \qquad \alpha_l = \frac{\partial S(q,\beta,t)}{\partial \beta_l}$$

Przykład oscylator harmoniczny $H = H_0 + H_1$ $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ $H_1 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian) H_0 opisuje cząstkę swobodną

Równanie Hamiltona-Jacobiego dla funkcji H_0

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Można uwzględniając to iż $\frac{\partial H_0}{\partial x} = 0, \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0$ zapisać S w postaci $S = \beta x - Et$

Ponieważ $p = \frac{\partial S}{\partial x} = \beta$ i $E = H_0 = \frac{p^2}{2m}$ to $S = \beta x - \frac{\beta^2}{2m} t$ (β nowy pęd po transformacji kanonicznej, we wzorze na S pominięto stałą addytywną)

Nowe współrzędna α po transformacji kanonicznej

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} = x - \frac{\beta t}{m} \Rightarrow x = \alpha + \frac{\beta t}{m}$$

Uwzględnienie obecności funkcji $H_1 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\alpha + \frac{\beta t}{m}\right)^2$

powoduje iż α, β przestają być stałymi lecz spełniają równania

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \omega^2 t \left(\alpha + \frac{\beta t}{m}\right) \qquad \dot{\beta} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = -m\omega^2 \left(\alpha + \frac{\beta t}{m}\right)$$

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t\left(\alpha + \frac{\beta t}{m}\right) \qquad \dot{\beta} = -m\omega^2\left(\alpha + \frac{\beta t}{m}\right)$$

W pierwszym przybliżeniu równania te można uprościć do postaci

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t\left(\alpha_0 + \frac{\beta_0 t}{m}\right) \qquad \dot{\beta} = -m\omega^2\left(\alpha_0 + \frac{\beta_0 t}{m}\right)$$ gdzie $\alpha_0 = \alpha(t=0), \beta_0 = \beta(t=0)$

Załóżmy iż w chwili początkowej t=0 cząstka znajdowała się w punkcie o x=0 co uwzględniając relacje $x = \alpha + \frac{\beta t}{m}$ prowadzi do wniosku iż $\alpha_0 = 0$ a zatem

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega^2\beta_0}{m}t^2 \Rightarrow \alpha(t) \overset{ozn}{=} \alpha_1(t) = \frac{\omega^2\beta_0}{3m}t^3 \qquad \dot{\beta} = -\omega^2\beta_0 t \Rightarrow \beta(t) \overset{ozn}{=} \beta_1(t) = \beta_0 - \frac{1}{2}\omega^2\beta_0 t^2$$

W kolejnym przybliżeniu

$$\dot{\alpha} = \omega^2 t\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1 t}{m}\right) = \omega^2 t\left(\frac{\omega^2\beta_0 t^3}{3m} + \frac{\beta_0 t}{m} - \frac{\omega^2\beta_0 t^3}{2m}\right) = \frac{\beta_0\omega^2}{m}\left(t^2 - \frac{1}{6}\omega^2 t^4\right) \Rightarrow \alpha(t) = \frac{\beta_0\omega^2}{m}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{1}{30}\omega^2 t^5\right)$$

$$\dot{\beta} = -m\omega^2\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1 t}{m}\right) = -m\omega^2\left(\frac{\beta_0\omega^2 t^3}{3m} + \frac{\beta_0 t}{m} - \frac{\beta_0\omega^2 t^3}{2m}\right) =$$

$$= -\omega^2\beta_0 t + \frac{1}{6}\omega^4\beta_0 t^3 \Rightarrow \beta(t) = \beta_0 - \frac{1}{2}\omega^2\beta_0 t^2 + \frac{1}{24}\omega^4\beta_0 t^4$$

A zatem $$x = \alpha + \frac{\beta t}{m} \approx \frac{\beta_0}{m\omega}\left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!}\right] \qquad p = \beta \approx \beta_0\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!}\right]$$

$$x = \alpha + \frac{\beta t}{m} \approx \frac{\beta_0}{m\omega}\left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!}\right] \qquad p = \beta \approx \beta_0\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!}\right]$$

Uzyskany wynik można porównać z dokładnym rozwiązaniem przy warunku początkowym $x(t=0)=0$

$$x = A\sin(\omega t) = \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \qquad p = m\dot{x} = mA\omega\cos(\omega t) = p_0\cos(\omega t)$$

$$p_0 = p(t=0)$$

które dla $\omega t << 1$ można przybliżyć poprzez następujące rozwinięcia

$$x \approx \frac{p_0}{m\omega}\left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!}\right] \qquad p = p_0\left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!}\right]$$

zgodne ze wzorem znalezionym poprzednio przy uwzględnieniu iż $\beta_0 = p_0$