

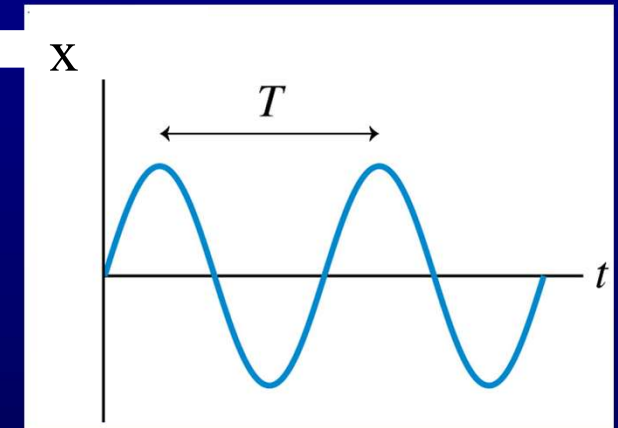
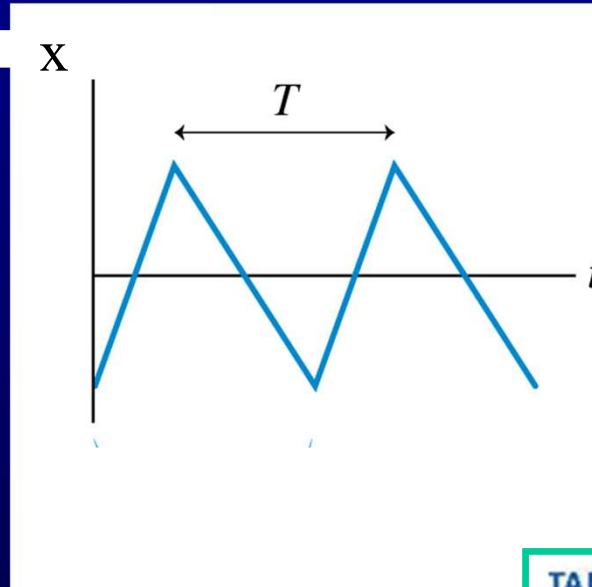
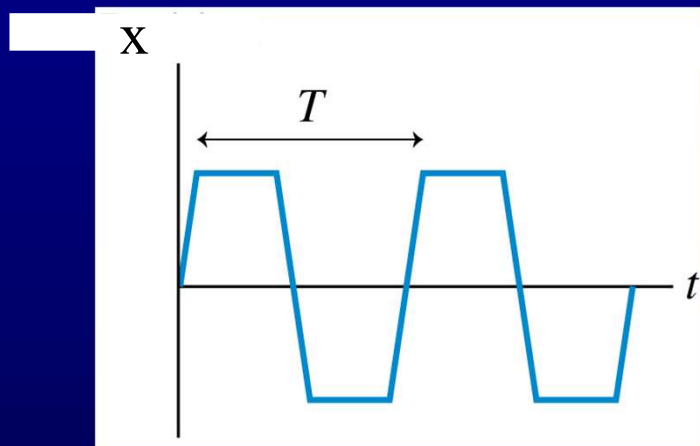
Ruch drgający harmoniczny prosty

Drgania

Ruch drgający jest ruchem okresowym. Układ znajduje się w tym samym położeniu w jednakowych odstępach czasu

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{dla dowolnego } t$$

T - okres drgań



f – częstotliwość

Ilość drgań w jednostce czasu

$$f = \frac{1}{T}$$

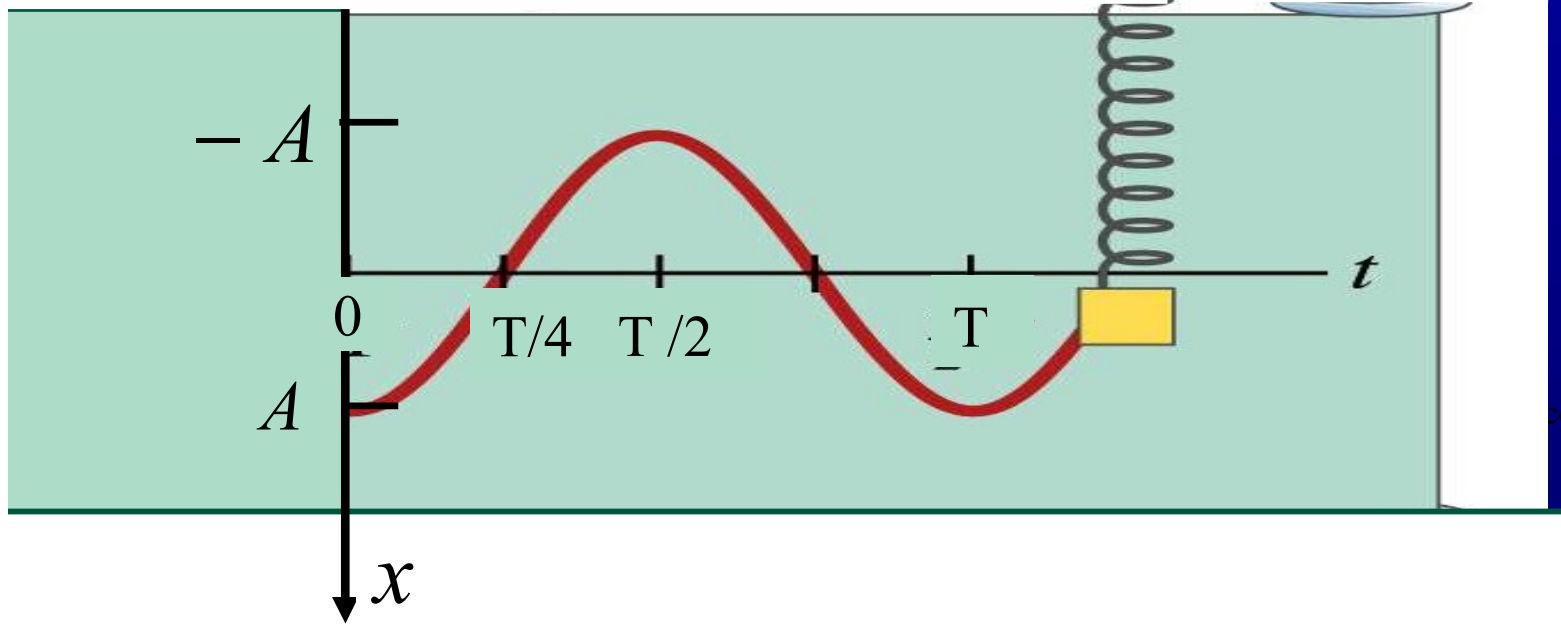
$$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$$

TABLE 14.1 Units of frequency

Frequency	Period
$10^3 \text{ Hz} = 1 \text{ kilohertz} = 1 \text{ kHz}$	1 ms
$10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ megahertz} = 1 \text{ MHz}$	$1 \mu\text{s}$
$10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ gigahertz} = 1 \text{ GHz}$	1 ns

Drgania harmoniczne (proste)

T okres drgań
A amplituda



Zależność wychylenia od położenia równowagi $x(t)$ może być opisana przy pomocy funkcji trygonometrycznej

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

gdzie A -amplituda –moduł maksymalnego wychylenia z położenia

równowagi $x=0$, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ -częstość kołowa, f -częstotliwość drgań

φ_0 -faza początkowa drgań. Na rysunku przyjęto iż $\varphi_0=0$

Widać iż

$$x(t+T) = A \cos(\omega(t+T) + \varphi_0) = A \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{T}T + \varphi_0\right) = \\ = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = x(t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$|\vec{i}| = 1$$

Max. wartość
prędkości

Zależność od czasu prędkości $\vec{V} = V\vec{i}$

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -V_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$V_{\max} = A\omega$$

i przyspieszenia $\vec{a} = a\vec{i}$

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -a_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Max. wartość
przyspieszenia

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$\frac{d \cos(bt+c)}{dt} = -b \sin(bt+c)$$

$$\frac{d \sin(bt+c)}{dt} = b \cos(bt+c)$$

Można zauważyć iż $a = -\omega^2 x$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Ogólna postać funkcji opisującej zależność wychylenia od położenia równowagi od czasu zawiera dwie stałe dowolne. W funkcji zaprezentowanej powyżej stałymi tymi są A (amplituda drgań) i φ_0 (faza początkowa drgań). Stałe A , φ_0 można określić w oparciu o warunki początkowe ruchu np. położenie i prędkość w chwili czasu $t=0$. W szczególności φ_0 zależy od chwili wyboru początku pomiaru czasu.

$$t=0 \text{ s, } x=A, V=0$$

lub

$$t=0 \text{ s, } x=0, V>0$$

$$\varphi_0=0$$

lub

$$\varphi_0 = -\pi/2$$

$$x(t) = [A] \cos(\omega t)$$

lub

$$x(t) = [A] \sin(\omega t)$$

$$A\omega = V(t=0)$$

$$V(t) = -[A\omega] \sin(\omega t)$$

$$V(t) = [A\omega] \cos(\omega t)$$

$$a(t) = -[A\omega^2] \cos(\omega t)$$

$$a(t) = -[A\omega^2] \sin(\omega t)$$

$$x_{\max} = A$$

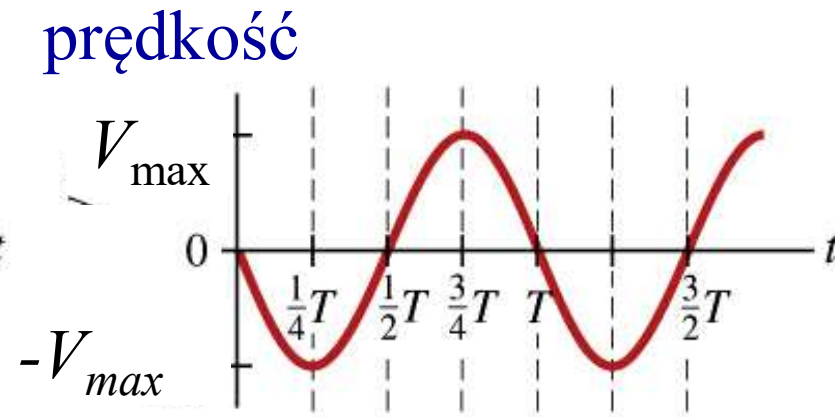
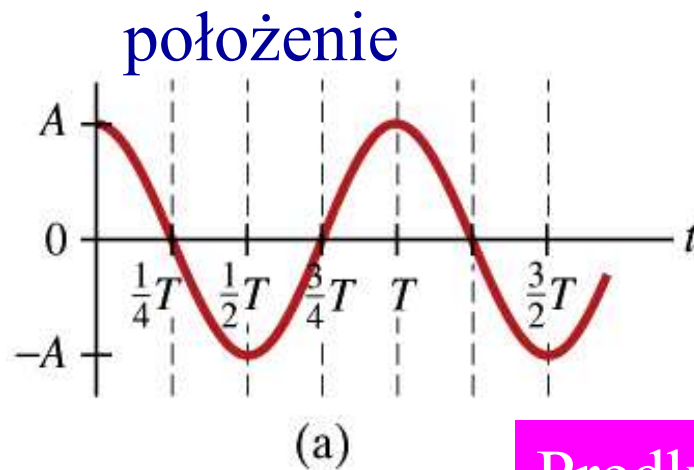
$$V_{\max} = A\omega$$

$$a_{\max} = A\omega^2$$

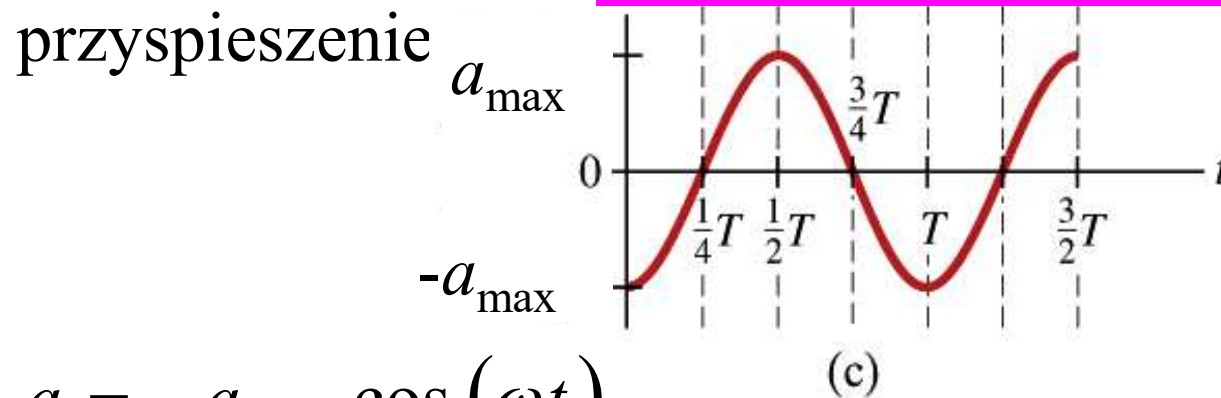
Wychylenie z położenia równowagi, prędkość i przyspieszenie w funkcji czasu przy założeniu iż $\varphi_0=0$

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$V = -V_{\max} \sin(\omega t)$$



Prędkość $V=0$ gdy $|x|$ maksymalne



$$a = -a_{\max} \cos(\omega t)$$

Dr. Koymen

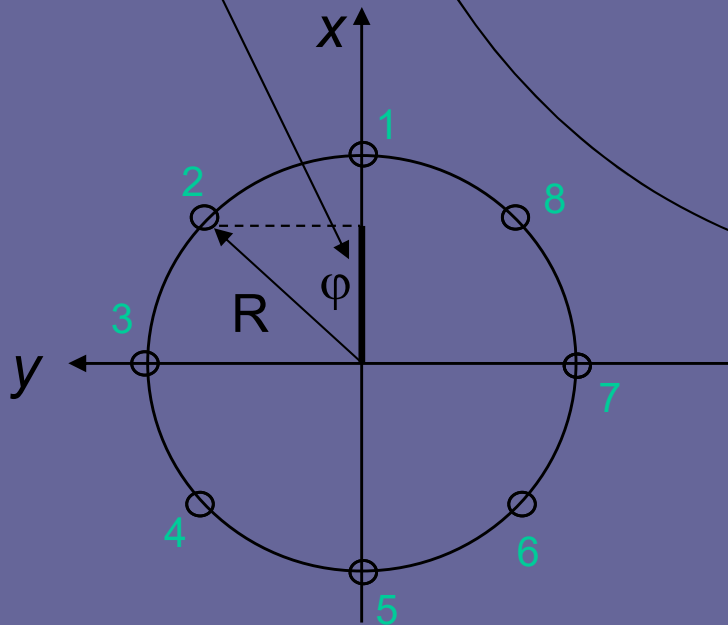
Przyspieszenie $a=0$ gdy $|V|$ maksymalne

Analogia pomiędzy ruchem jednostajnym po okręgu z prędkością kątową i ruchem harmonicznym

$$x = R \cos(\varphi) = R \cos(\omega t)$$

$$\varphi = \omega t$$

$$x = A \cos(\omega t) \\ \Rightarrow A = R$$



prędkość

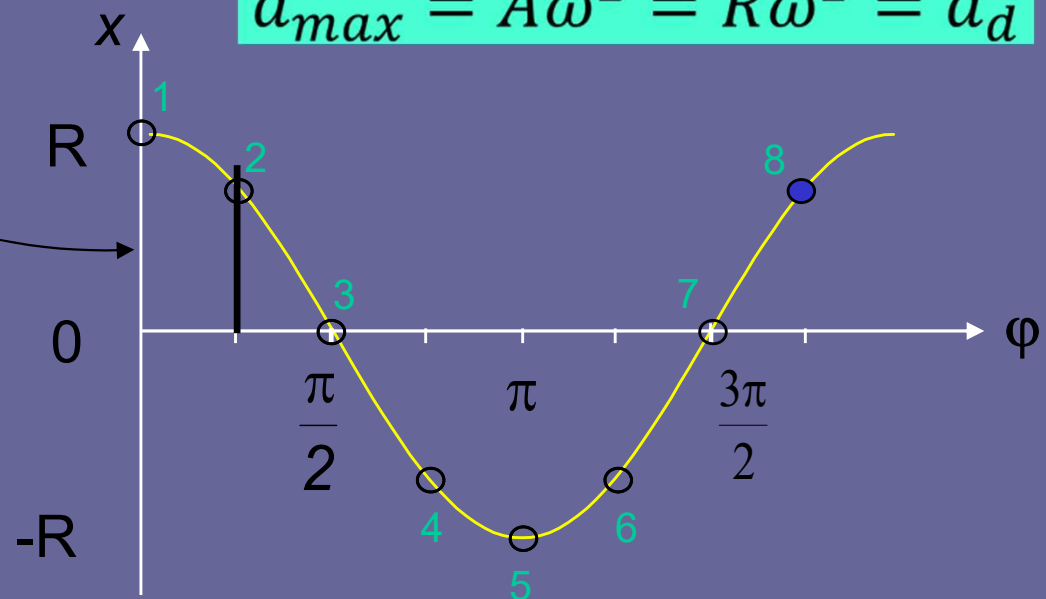
$$V = -R\omega \sin(\omega t) = -V_{max} \sin(\omega t)$$

$$V_{max} = A\omega = R\omega = \\ = \text{szybkość w ruchu po okręgu}$$

przyspieszenie

$$a = -R\omega^2 \cos(\omega t) = -a_{max} \cos(\omega t)$$

$$a_{max} = A\omega^2 = R\omega^2 = a_d$$



Siła w ruchu harmonicznym

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$x\vec{i}$ -wektor wodzący określający położenie ciała w układzie o początku w położeniu równowagi $x=0$, k - stała sprężystości

Siła jest skierowana zawsze w kierunku położenia równowagi, a jej wartość proporcjonalna do odległości ciała od położenia równowagi

$$F_x = F = -kx$$

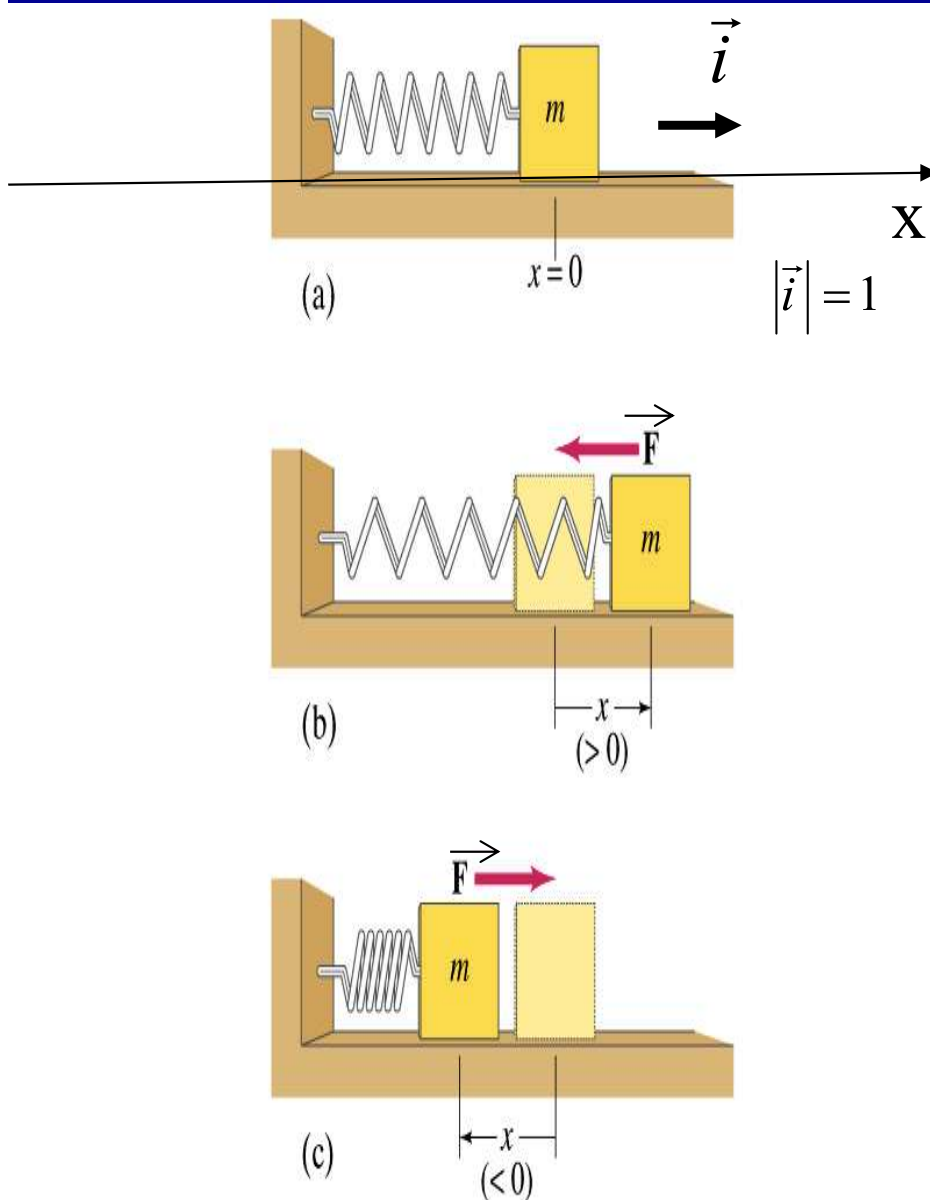
ozn.

Maksymalna wartość siły

$$F_{max} = kA = ma_{max} = m\omega^2 A$$

Związek częstości kołowej drgań ze stałą sprężystości i masą ciała

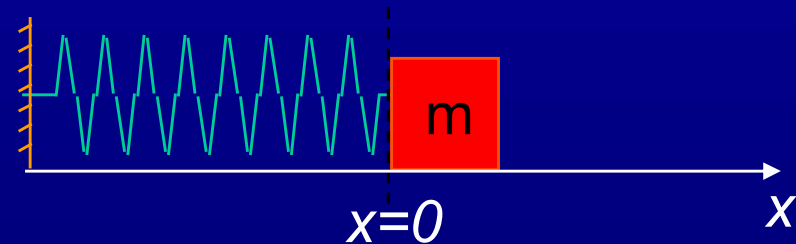
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Energia potencjalna związana z siłą sprężystości (harmoniczną)

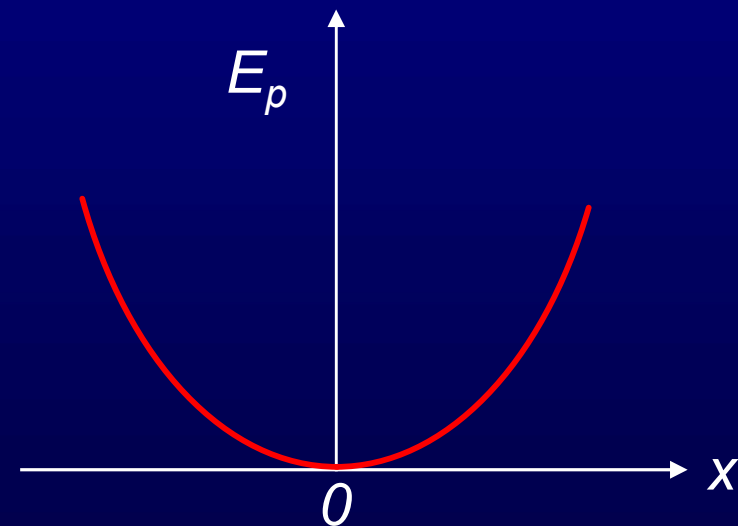
$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$$



$|x|$ -odległość ciała od położenia równowagi $x=0$ w którym $\vec{F} = 0$

Układ, którego energia potencjalna wyraża się powyższym wzorem, podlegający drganiom harmonicznym, nazywamy oscylatorem harmonicznym.



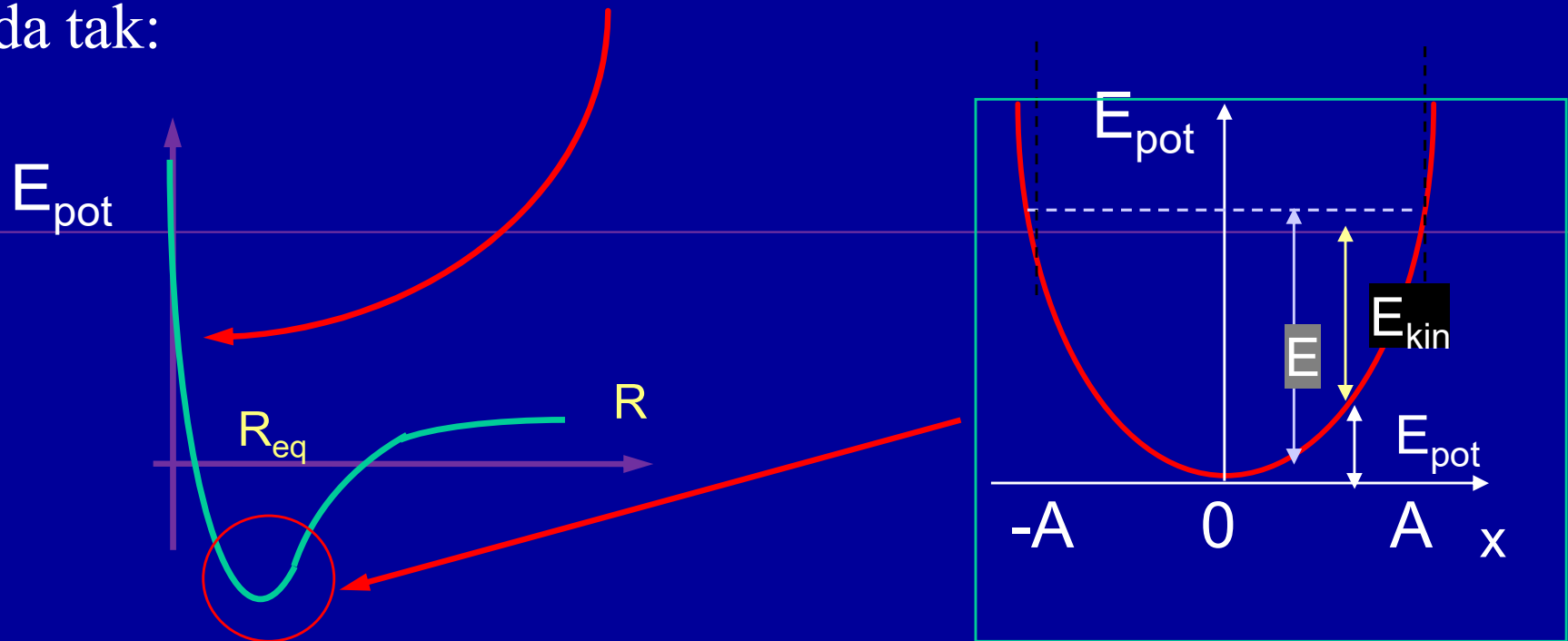
Oscylator harmoniczny i potencjał kwadratowy

- Siły harmoniczne występują pomiędzy atomami wychylonymi z położeń ich równowagi w cząsteczkach i ciałach stałych, gdy energia potencjalna ich oddziaływania jest proporcjonalna do kwadratu wychylenia z położenia równowagi $x = R - R_{eq}$

R – odległość między atomami

R_{eq} – odległość dla której energia potencjalna jest minimalna

- Na przykład, energia potencjalna oddziaływań występujących pomiędzy atomami wodoru H w cząsteczce H_2 wygląda tak:



Energia w ruchu harmonicznym

Energia kinetyczna $E_{kin} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ $V = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$

Energia potencjalna $E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$ $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

Energia całkowita $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} [m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

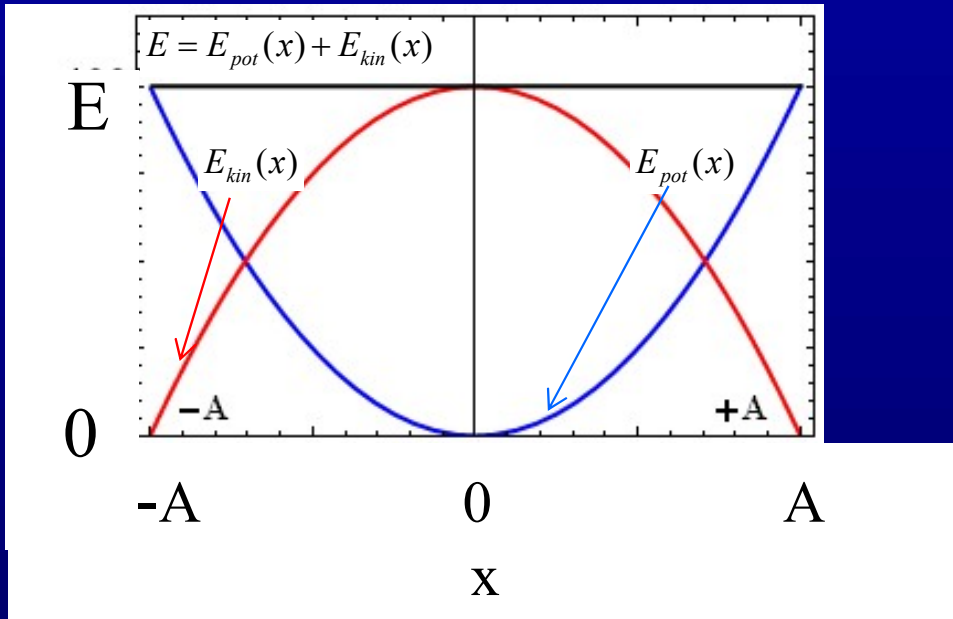
$$E = \frac{1}{2} [k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m V_{\max}^2$$

$$V_{\max} = A\omega$$

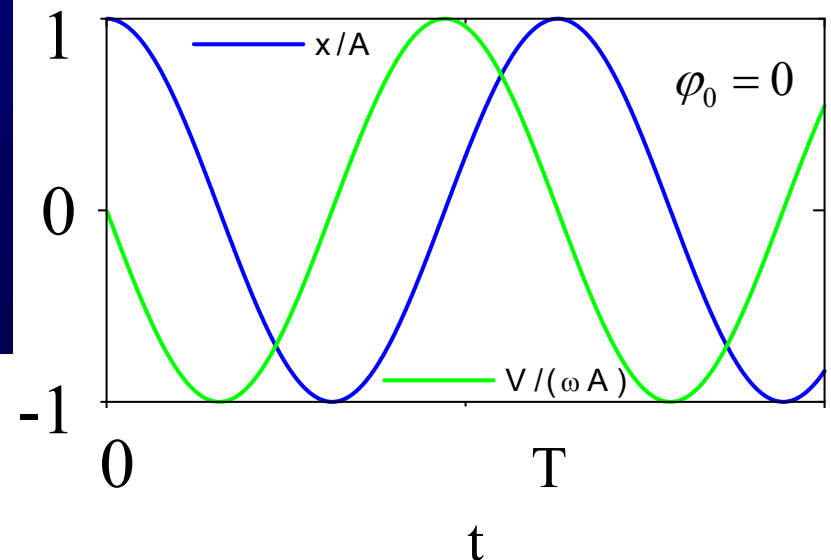
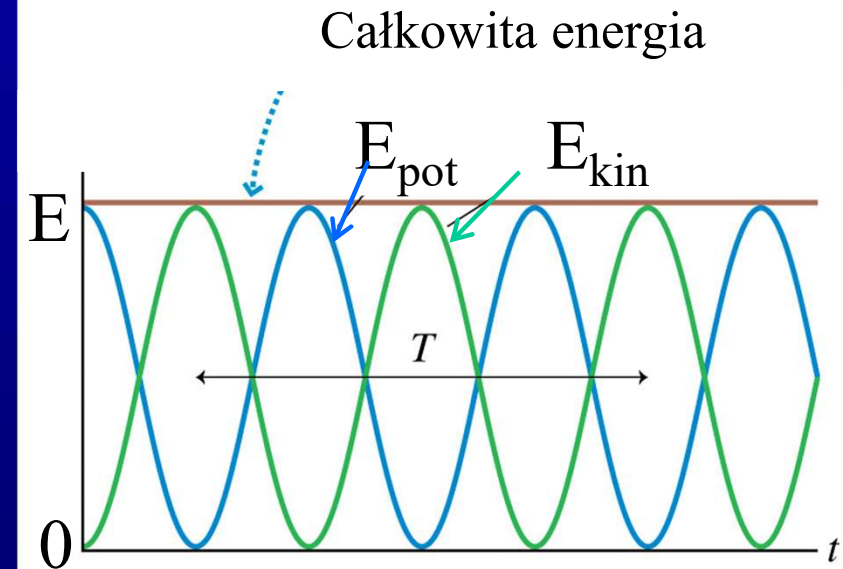
Całkowita energia ciała podlegającego ruchowi harmonicznemu jest stała i proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań.

Energia w ruchu harmonicznym

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mV_{\max}^2 = \text{const}$$



Energia potencjalna jest maksymalna gdy ciało znajduje się w punkcie najdalej położonym od położenia równowagi $x = \pm A$ i spada do zera gdy wychylenie ciała od położenia równowagi $x = 0$. W punktach w których energia potencjalna jest maksymalna energia kinetyczna spada do zera, zaś w punktach w których energia potencjalna jest równa zero, energia kinetyczna jest maksymalna.



Pyt. Ciało podlega drganiom harmonicznym prostym nietłumionym zachodzącym ze stałą amplitudą drgań. Które z twierdzeń dotyczących ruchu tego ciała są nieprawdziwe?

- a) Wartość wypadkowej siły działającej na ciało jest wprost proporcjonalna do kwadratu wychylenia ciała z położenia równowagi.
- b) Siła wypadkowa działająca na ciało jest zawsze skierowana w kierunku położenia równowagi.
- c) Całkowita energia mechaniczna ciała nie ulega zmianie w trakcie ruchu ciała.
- d) Całkowita energia mechaniczna ciała równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań.
- e) Energia potencjalna ciała jest wprost proporcjonalna do kwadratu wychylenia ciała od położenia równowagi.
- f) Ruch ciała jest ruchem jednostajnie zmiennym po linii prostej

Wahadło fizyczne

Ciało sztywne o masie m i dowolnym kształcie, może się obracać wokół dowolnej osi OZ nieprzechodzącej przez środek ciężkości (masy) ciała.

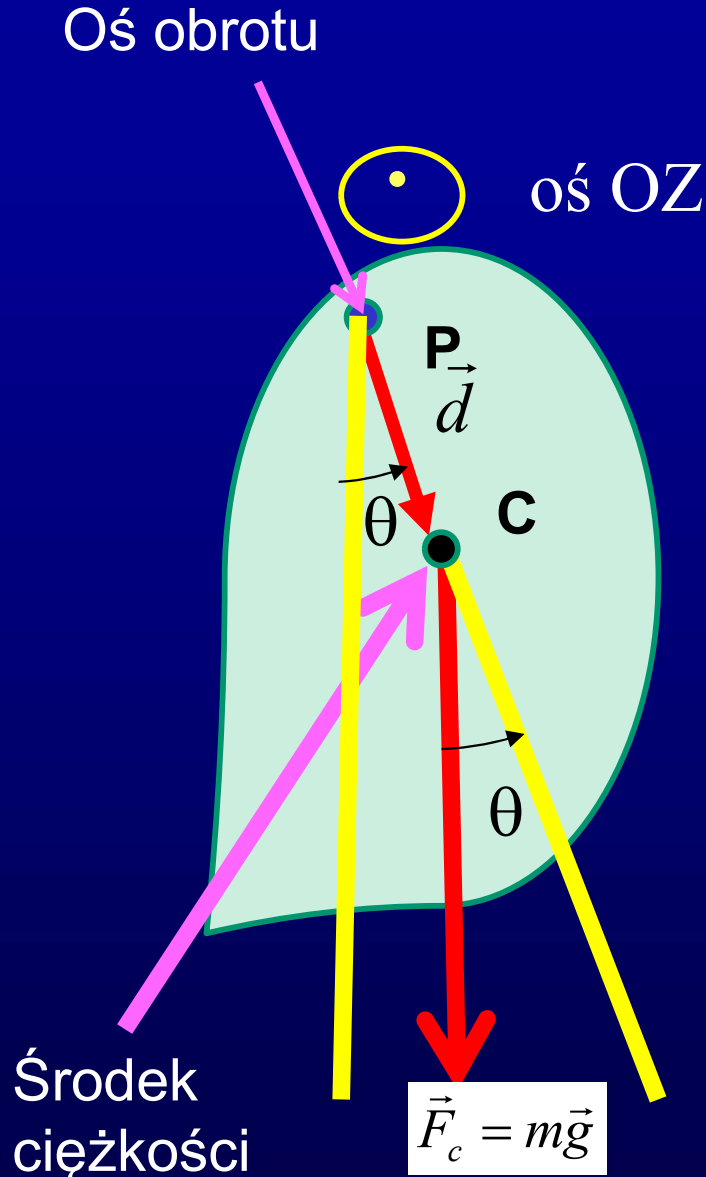
Po odchyleniu od położenia równowagi o kąt θ , pojawia się moment siły ciężkości dążący do przywrócenia równowagi o wartości

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{F}_c$$

$$|\vec{\tau}| = F_c d \sin(\theta) = mgd \sin(\theta)$$

Rzut momentu siły na oś OZ
prostopadłą do płaszczyzny drgań

$$\tau_z = -|\vec{\tau}| = -mgd \sin(\theta)$$



Znak $-$ gdyż moment siły ma zwrot przeciwny do zwrotu osi OZ (ustalonego przez zwrot wektora prędkości kątowej w ruchu w którym θ rośnie)

gdy $\sin(\theta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < \pi$

Równanie ruchu obrotowego

$$I\varepsilon = \tau_z$$

I – moment bezwładności względem osi obrotu, ε – przyspieszenie kątowe

Równanie ruchu dla małych wychyleń gdy $\sin(\theta) \cong \theta$

$$I\varepsilon = -(mgd)\theta$$

Ma ono taką samą postać jak dla ciężarka umieszczonego na sprężynie

$ma = -kx$ gdy uwzględnimy definicje przyspieszenia kątowego i

przyspieszenia i dokonamy zamiany $k \leftrightarrow mgd, m \leftrightarrow I, x \leftrightarrow \theta$

Znając rozwiązanie równania dla ciężarka na sprężynie można wydedukować rozwiązanie jego dla wahadła fizycznego

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I}$$

Okres drgań wahadła fizycznego

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

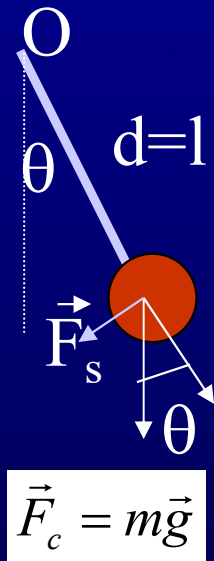
Wahadło matematyczne

Punkt materialny o masie m zawieszony na nici o długości l porusza się po okręgu o promieniu l .

Moment bezwładności względem osi obrotu $I = ml^2$

Odległość osi obrotu od środka ciężkości

$$d = l$$



Dla małego maksymalnego kąta wychylenia $\theta_{\max}$ spełniającego relację $\sin(\theta_{\max}) \approx \theta_{\max}$ mamy do czynienia z ruchem harmonicznym o okresie

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres nie zależy od masy m punktu a przy małych wychyleniach od położenia równowagi również od amplitudy drgań

Drgania harmoniczne tłumione

Oprócz siły harmoniczej występuje siła tłumiąca proporcjonalna do wartości prędkości i przeciwnie skierowana do wektora prędkości

$$\vec{F}_t = -b\vec{V}$$

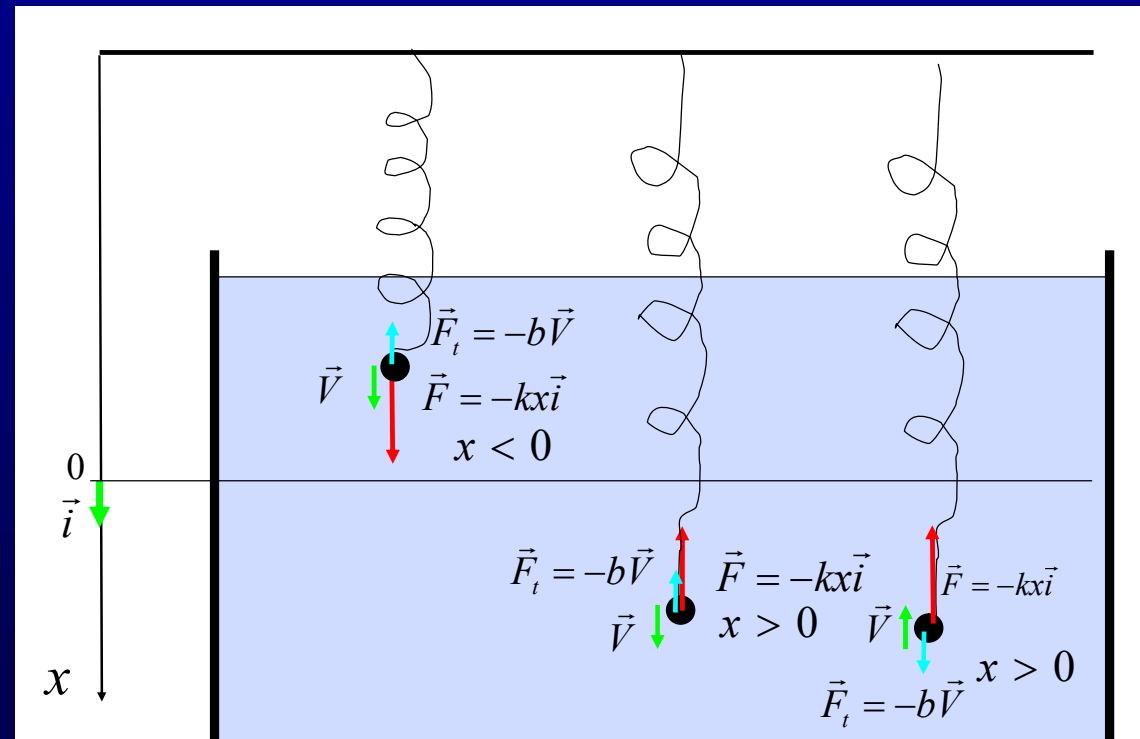
$$\vec{V} = V\vec{i}$$

$$\vec{a} = a\vec{i}$$

b -współczynnik tłumienia

Wypadkowa siła działająca na ciało

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F} + \vec{F}_t = (-kx - bV)\vec{i}$$



Drgania tłumione- rozwiązanie dla małego tłumienia

$$\beta = \frac{b}{2m} < \omega_0$$

- **Wychylenie z położenia równowagi**

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

- **Częstość kołowa drgań**

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

gdzie

częstość drgań
swobodnych bez
tłumienia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Jeżeli tłumienie jest małe to ciało wykonuje drgania, ale amplituda drgań wykładniczo zanika.
- Częstość drgań jest nieznacznie mniejsza niż w przypadku braku tłumienia.

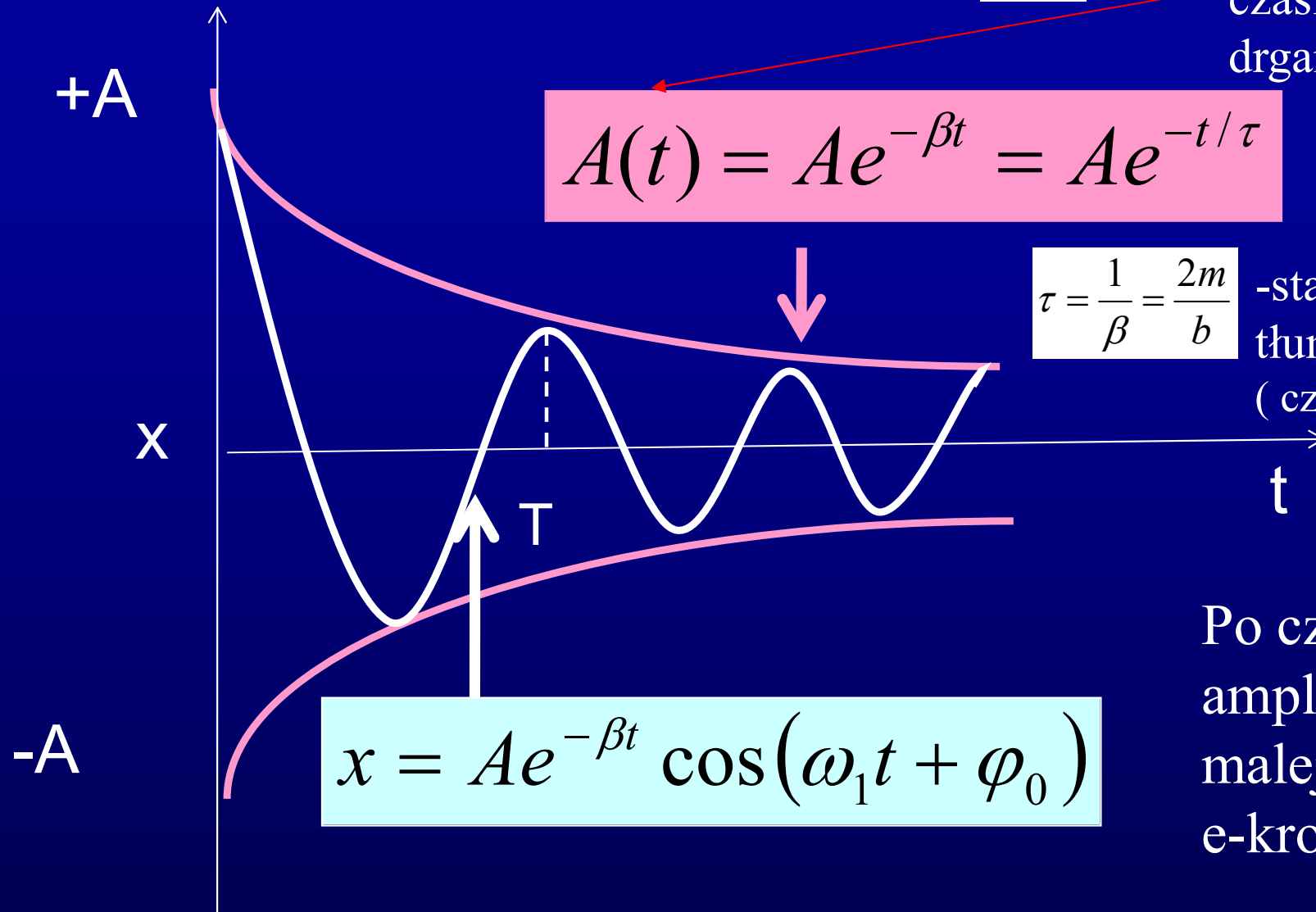
Wykres ruchu harmonicznego tłumionego $\beta < \omega_0$

Zmienna w czasie amplituda drgań

$$A(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{b}$$

-stała czasowa tłumienia drgań
(czas relaksacji)



Po czasie τ
amplituda
maleje
e-krotnie

Uwaga: Gdy $\beta > \omega_0$ to ruch ciała nie ma charakteru drgań. Ciało wychylone z położenia równowagi nie posiadające prędkości początkowej wraca asymptotycznie do położenia równowagi najszybciej wówczas gdy $\beta = \omega_0$ (ruch pełzający krytyczny)

Drgania wymuszone

Na układ o częstości własnej drgań swobodnych ω_0 działa dodatkowo
periodyczna siła wymuszająca $F_0 \cos \omega t$

Wypadkowa siła działająca na układ

$$F_{\text{wyp}} = -kx - bV + F_0 \cos \omega t$$

$$F_{\text{wyp}} = ma$$

Równanie ruchu

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

W stanie ustalonym osiągniętym po pewnym czasie od
rozpoczęcia drgań układ wykonuje drgania o częstości równej
częstości siły wymuszającej $x = A \cos(\omega t - \delta)$.

Amplituda drgań A i faza δ zależy od częstości ω i ω_0

$$A = \frac{F_0}{mG}$$

$$\delta = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctg \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$G = \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{b^2\omega^2}{m^2}}$$

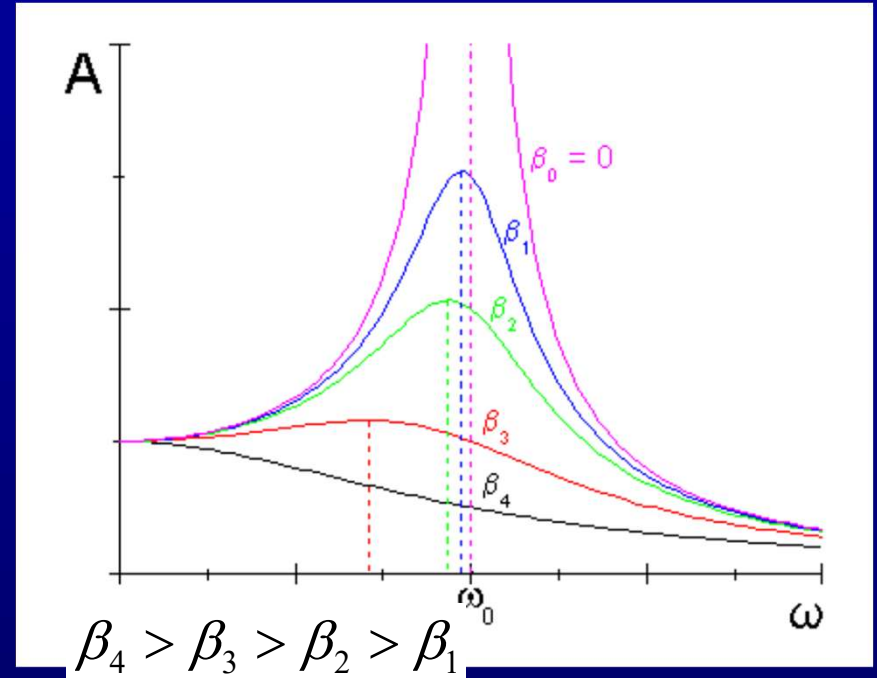
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Drgania wymuszone. Rezonans

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{b^2 \omega^2}{m^2}}}$$

Dla $\beta=0$ ($b=0$, brak tłumienia)

$$\omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow A \rightarrow \infty \quad \text{rezonans}$$



W obecności tłumienia amplituda rezonansowa jest skończona i tym mniejsza im większe β (czyli też b). Częstość rezonansowa (dla której amplituda osiąga wartość maksymalną) występuje gdy i jest określona wzorem

$$\beta = \frac{b}{2m} < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Jest ona nieco mniejsza od ω_0 .