



OMNIS2

Formalizm kanoniczny-cz.1

- Funkcja Hamiltona i równania Hamiltona, przestrzeń fazowa, całki ruchu w formalizmie kanonicznym, nawiasy Poissona
- Przykłady wykorzystania formalizmu kanonicznego do opisu układów dla których można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony



Wyprowadzenie równań Hamiltona

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \quad L = L(q, \dot{q}, t), \quad l = 1, 2, \dots, f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \\ \dot{q}_l = v_l \end{cases}, \quad L = L(q, v, t), \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Równ. Lagrange'a II rodzaju:
układ f równań różniczkowych
zwyczajnych 2. rzędu na
zmienne $q_l, l=1, 2, \dots, f$

Układ $2f$ równań różniczkowych
zwyczajnych 1. rzędu na
zmienne $q_l, v_l, l=1, 2, \dots, f$

Dokonyamy zamiany zmiennych (q, v) na zmienne (q, p) w powyższym układzie równań wykorzystując tak zwaną transformację Legendre'a. W tym celu na początku posługując się definicją pędów uogólnionych, przepisujemy równania te w postaci

$$p_l = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_l} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_l = \frac{\partial L}{\partial q_l} \\ \dot{q}_l = v_l \end{cases}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Obliczmy wariacje następujących funkcji:

$$\delta L = \delta L(q, v, t) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial v_l} \delta v_l \right) = \sum_{l=1}^f (\dot{p}_l \delta q_l + p_l \delta v_l)$$

$$\delta \sum_{l=1}^f p_l v_l = \sum_{l=1}^f (p_l \delta v_l + v_l \delta p_l) = \sum_{l=1}^f (p_l \delta v_l + \dot{q}_l \delta p_l)$$

Odejmując stronami,
dostaniemy

$$\delta \left(\sum_{l=1}^f p_l v_l - L \right) = \sum_{l=1}^f (\dot{q}_l \delta p_l - \dot{p}_l \delta q_l)$$

Wariacja funkcji po lewej
stronie, wyrażonej w
zmiennych q_l, p_l ,
traktowanych jako
niezależne

Zdefiniujmy **funkcję Hamiltona (Hamiltonian)**

$$\left\{ \begin{array}{l} H = H(q, p, t) \equiv \sum_{l=1}^f p_l v_l(q, p, t) - L(q, v(q, p, t), t) \\ \text{gdzie } p_l = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_l} \end{array} \right.$$

$$\delta H = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) = \sum_{l=1}^f (\dot{q}_l \delta p_l - \dot{p}_l \delta q_l) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_l} + \dot{p}_l \right) \delta q_l + \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} - \dot{q}_l \right) \delta p_l \right] = 0$$

dowolne

Funkcja Hamiltona zależy od współrzędnych i pędów uogólnionych związanych z tymi współrzędnymi i czasu. Nie może zależeć od prędkości uogólnionych, od których zależy funkcja G (uogólniona energia) równa co do wartości funkcji Hamiltona

$$G = \sum_{l=1}^f p_l(q_l, v_l, t) v_l - L(q, v, t)$$

Równania kanoniczne Hamiltona

$$\Rightarrow \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Układ $2f$ równań różniczkowych zwyczajnych 1. rzędu na **zmienne kanonicznie sprzężone** $q_l, p_l, l=1, 2, \dots, f$

Stan układu punktów materialnych o f stopniach swobody można reprezentować jako punkt w $2f$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej** o współrzędnych $(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f)$

Współrzędne te traktujemy a priori jako zmienne niezależne od siebie, a wszystkie relacje między nimi są określone poprzez równania Hamiltona.

Przestrzeń fazowa

Stan układu punktów materialnych o f stopniach swobody można reprezentować jako punkt w $2f$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej** o

współrzędnych $(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f)$

Układ w trakcie ruchu przemieszcza po pewnej trajektorii łączącej punkty w przestrzeni fazowej.

Gdy funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu to przez dowolny punkt w przestrzeni fazowej przechodzi tylko jedna trajektoria ruchu, czyli trajektorie te się nie przecinają. Wynika to z faktu iż znajomość położenia i pędów wszystkich punktów materialnych układu oraz funkcji Hamiltona w pełni determinuje jego późniejszy ruch.

Gdy funkcja Hamiltona zależy jawnie od czasu to przez dany punkt w przestrzeni fazowej *w ustalonej chwili czasu* przechodzi także tylko jedna trajektoria, a zatem trajektorie te *w ustalonej chwili czasu* się nie przecinają

Powyższe stwierdzenia nie są słuszne w przypadku przestrzeni konfiguracyjnej.

Inny sposób wyprowadzenia równań Hamiltona z równań Lagrange'a II rodzaju

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^f p_k v_k(q, p, t) - L(q, v(q, p, t), t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_l} = - \frac{\partial L}{\partial q_l} = -\dot{p}_l$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = v_l + \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_l} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial p_l} = v_l + \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_l} - \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_l} = v_l = \dot{q}_l$$

Wniosek dod. $\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{\partial L}{\partial q_l} \Rightarrow G \text{ dy } \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \text{ to } \frac{\partial H}{\partial q_l} = 0$

Jeżeli dana współrzędna nie występuje w funkcji Lagrange'a to i nie występuje w funkcji Hamiltona

Funkcja Hamiltona dla układów na które działają siły potencjalne w przypadku więzów skleronomicznych

Jeżeli:

- Związki między współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędnymi uogólnionymi nie zależą jawnie od czasu $x=x(q)$ (czyli więzy muszą być skleronomiczne)
- Siły działające na układ mają potencjał $V(q, t)$

to funkcja Hamiltona równa liczbowo funkcji $G(q, \dot{q}, t) = \sum_{l=1}^f p_l(q, \dot{q}, t) \dot{q}_l - L(q, \dot{q}, t)$

jest równa sumie energii kinetycznej i potencjału dla układu

$$H = T + V = T(q, p) + V(q, t)$$

Przykład. Cząstka poruszająca się w obecności sił potencjalnych na ruch której nie nałożono więzów przy przyjęciu za współrzędne uogólnione współrzędnych kartezjańskich

Współrzędne uogólnione $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z \Rightarrow x = q_1, y = q_2, z = q_3$ (*)

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t)$

Pędy uogólnione $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \quad (l=1, \dots, f) \Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

Uogólniona energia

$$G = G(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \sum_{l=1}^f p_l(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \dot{q}_l - L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \Rightarrow$$

$$G(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z, t)$$

$G = T + V$ (bo w relacjach (*) nie występuje czas)

Funkcja Hamiltona

$$H = H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = G(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t), \dots, \dot{q}_f(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t), t)$$

$$p_x = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad p_y = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{p_x}{m} \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} \right)^2 + \left(\frac{p_z}{m} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + V(x, y, z, t)$$

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z, t)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

$$(l=1, \dots, f=3)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

Nie zawsze pochodne po czasie pędów uogólnionych są równe odpowiednim składowym siły wypadkowej jak to ma miejsce w tym prostym przykładzie

Relacje identyczne z tymi definiującymi pędy uogólnione poprzez pochodne z funkcji Lagrange'a po współrzędnych uogólnionych

Funkcja Hamiltona dla cząstki o ładunku e w polu elektromagnetycznym przy więzach niezależnych od czasu

Dla cząstki o ładunku e poruszającej się z prędkością $\vec{v}$ w polu elektromagnetycznym o potencjale skalarnym φ i potencjale wektorowym $\vec{A}$ mamy potencjał uogólniony U : $U = e\varphi(\vec{r}, t) - e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}$, funkcja Lagrange'a: $L = T - U$

Wektor pędu uogólnionego: $\vec{p}_u = m\vec{v} + e\vec{A}$ We współ. kart. $\vec{p}_u = (p_{u1}, p_{u2}, p_{u3}) = (p_{ux}, p_{uy}, p_{uz})$

Przy wyborze za współrzędne uogólnione współrzędnych kartezjańskich składowe wektora pędu uogólnionego są pędami uogólnionymi sprzężonymi z tymi współrzędnymi

Przy wyborze współrzędnych uogólnionych tak iż $x_j = x_j(q) \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{x}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l$

$$\sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l = \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^3 p_{uj} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l = \sum_{j=1}^3 \overbrace{p_{uj} \dot{x}_j}^{\leftarrow} = \vec{p}_u \cdot \vec{v}, \quad f \leq 3 \quad p_l = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_l} \quad p_{uj} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_j}$$

$$G = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l - L = \vec{p}_u \cdot \vec{v} - (T - U) = (m\vec{v} + e\vec{A}) \cdot \vec{v} - T + e\varphi - e\vec{A} \cdot \vec{v} =$$

$$= m\vec{v} \cdot \vec{v} - T + e\varphi = 2T - T + e\varphi = T + e\varphi$$

$$\vec{p}_u = m \cdot \vec{v} + e\vec{A} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p}_u - e\vec{A}) \Rightarrow T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2m} (\vec{p}_u - e\vec{A})^2$$

Funkcja Hamiltona

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p}_u - e\vec{A})^2 + e\varphi$$

przy czym $p_{uj} = p_{uj}(p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f, t)$ $A_j = A_j(q_1, \dots, q_f, t)$ $\varphi = \varphi(q_1, \dots, q_f, t)$

Gdy współrzędnymi uogólnionymi są współrzędne kartezjańskie

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2] + e\varphi$$

$$p_x = p_{ux} \quad p_y = p_{uy} \quad p_z = p_{uz} \quad \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x - eA_x}{m} \quad \dot{y} = \frac{p_y - eA_y}{m} \quad \dot{z} = \frac{p_z - eA_z}{m}$$

Pochodna zupełna po czasie funkcji Hamiltona $H(q,p,t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{l=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_l} \dot{q}_l + \sum_{l=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_l} \dot{p}_l = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{l=1}^f \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \sum_{l=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H(q, p, t) = \sum_{l=1}^f p_l v_l(q, p, t) - L(q, v(q, p, t), t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - \sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial v_l} \frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Gdy funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu to i funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu.

Wynika to też z tego iż wartości funkcji G i H są takie same i $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Całki pierwsze równań Hamiltona

$$1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

Jeżeli funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu to jest stałą ruchu

Przy spełnieniu warunków przy których funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii (zapewniających to iż $H=T+V$ oraz T nie zależy jawnie od czasu) energia całkowita jest stałą ruchu gdy energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu

$$2) \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \Rightarrow p_r = \text{const} \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0 \Rightarrow q_s = \text{const}$$

Jeżeli w funkcji Hamiltona nie występuje współrzędna q_r (czyli ta współrzędna uogólniona jest cykliczna) lub pęd p_s , to odpowiednie zmienne kanonicznie sprzężone są całkami ruchu

Wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju z równań Hamiltona $H(q,p,t)$ (dla zainteresowanych)

Transformacja $p \rightarrow v$ zgodnie z którą $v_l = v_l(q, p, t)$, jest transformacją odwrotną do transformacji $v \rightarrow p$ zgodnie z którą $p_l = p_l(q, v, t)$ o ile są spełnione relacje

$$p_l = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_l} \quad v_l = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Można ją potraktować jako odwrotną transformację Legendre'a

Analogicznie można wprowadzić funkcję Lagrange'a w oparciu o znajomość funkcji Hamiltona

$$L(q, v, t) = \sum_{l=1}^f v_l p_l(q, v, t) - H(q, p(q, v, t), t), \quad \text{gdzie} \quad v_l = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Można pokazać, że prowadzi ona od równań Hamiltona do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_l} &= \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = - \frac{\partial H}{\partial q_l} = \dot{p}_l \\ \frac{\partial L}{\partial v_l} &= p_l + \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial v_l} = p_l + \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} - \sum_{k=1}^f v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} = p_l \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_l} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \end{aligned}$$

równania
Hamiltona

równania
Lagrange'a

Nawias Poissona

funkcji

$$F = F(q, p, t) \quad G = G(q, p, t)$$

$$(F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right)$$

$$F = F(q, p, t) \quad G = G(q, p, t) \quad F_1 = F_1(q, p, t) \quad F_2 = F_2(q, p, t)$$

Własności nawiasów Poissona: C-stała niezależna od współrzędnych i pędów

$$(F, G) = -(G, F), \quad (F, F) = 0, \quad (F_1 + F_2, G) = (F_1, G) + (F_2, G), \quad (F, C) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(F, G) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, G \right) + \left(F, \frac{\partial G}{\partial t} \right) \quad (F_1 F_2, G) = F_1 (F_2, G) + (F_1, G) F_2, \quad (CF, G) = C(F, G)$$

$$(F, q_l) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial q_l}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left(-\frac{\partial F}{\partial p_k} \delta_{lk} \right) = -\frac{\partial F}{\partial p_l}$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial p_k} = \frac{\partial p_l}{\partial q_k} = 0$$

$$(F, p_l) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial p_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_l}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \delta_{lk} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_l}$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial q_k} = \frac{\partial p_l}{\partial p_k} = \delta_{lk}$$

tożsamość Poissona



$$(F_1, (F_2, F_3)) + (F_2, (F_3, F_1)) + (F_3, (F_1, F_2)) = 0$$

Ważne relacje dla nawiasów Poissona współrzędnych i pędów uogólnionych

$$(F, q_l) = -\frac{\partial F}{\partial p_l}, \quad (F, p_l) = \frac{\partial F}{\partial q_l} \Rightarrow (q_k, q_l) = (p_k, p_l) = 0, \quad (q_k, p_l) = \delta_{kl}$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = l \\ 0 & \text{gdy } k \neq l \end{cases}$$

Dla dowolnej funkcji $F = F(q, p, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\frac{dF}{dt} = (F, H) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Gdy funkcja F nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ oraz $(F, H) = 0$ to funkcja F jest całką (stałą) ruchu

$$F = q_l \Rightarrow \frac{dq_l}{dt} = (q_l, H) + \frac{\partial q_l}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_l}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_l}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left(\delta_{lk} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

0 ↗ ↘

$$F = p_l \Rightarrow \frac{dp_l}{dt} = (p_l, H) + \frac{\partial p_l}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial p_l}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_l}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left(-\delta_{lk} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

Jak widać równania Hamiltona można zapisać przy pomocy nawiasów Poissona

$$\dot{q}_l = (q_l, H) \quad \dot{p}_l = (p_l, H)$$

Ponadto

$$F = H \Rightarrow \frac{dH}{dt} = (H, H) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Przykład. Można pokazać iż w przypadku gdy funkcja Hamiltona jest skalarną funkcją położenia i pędu cząstki (na którą nie nałożono więzów) czyli zachodzi
 $H = H(r^2, p^2, \vec{r} \cdot \vec{p}) = H(x^2 + y^2 + z^2, p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, xp_x + yp_y + zp_z)$
 to wszystkie składowe momentu pędu są stałymi ruchu (całkami pierwszymi ruchu)
 Dowód dla składowej z-towej (x, y, z, p_x, p_y, p_z – współrzędne uogólnione i związane z nimi pędy)

$$(L_z, H) = \frac{\partial L_z}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial L_z}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial L_z}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial L_z}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial L_z}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z} \quad L_z = xp_y - yp_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial r^2} \frac{\partial r^2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial r^2} 2x + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} p_x \quad \frac{\partial L_z}{\partial x} = p_y \quad \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial H}{\partial p^2} \frac{\partial p^2}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial p_x} = \frac{\partial H}{\partial p^2} 2p_x + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} x \quad \frac{\partial L_z}{\partial y} = -p_x \quad \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial r^2} \frac{\partial r^2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial r^2} 2y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} p_y \quad \frac{\partial L_z}{\partial z} = \frac{\partial L_z}{\partial p_z} = 0 \quad \frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial H}{\partial p^2} \frac{\partial p^2}{\partial p_y} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial p_y} = \frac{\partial H}{\partial p^2} 2p_y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} y$$

$$(L_z, H) = \frac{\partial H}{\partial p^2} 2p_x p_y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} xp_y - \frac{\partial H}{\partial p^2} 2p_y p_x - \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} yp_x +$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial r^2} 2xy + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} p_x y - \frac{\partial H}{\partial r^2} 2yx - \frac{\partial H}{\partial(\vec{r} \cdot \vec{p})} p_y x = 0$$

$$\frac{dL_z}{dt} = (L_z, H) + \frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

$$L_z = \text{const}$$

Twierdzenie Poissona - Jacobiego

Jeżeli $F_1(q,p,t)$ oraz $F_2(q,p,t)$ są całkami pierwszymi równań kanonicznych Hamiltona, to (F_1, F_2) jest także całką równań Hamiltona.

Przykład zastosowania twierdzenia Poissona-Jacobiego

Można pokazać iż $(L_x, L_y) = L_z$

A zatem jeżeli L_x oraz L_y są całkami ruchu to i L_z jest całką ruchu

Dowód tego iż $(L_x, L_y) = L_z$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yp_z - zp_y) + \vec{j}(zp_x - xp_z) + \vec{k}(xp_y - yp_x)$$

$$L_x = yp_z - zp_y \quad L_y = zp_x - xp_z$$

$$\begin{aligned} (L_x, L_y) &= \frac{\partial L_x}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} + \frac{\partial L_x}{\partial y} \frac{\partial L_y}{\partial p_y} + \frac{\partial L_x}{\partial z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \frac{\partial L_y}{\partial y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial z} = \\ &= 0 + 0 + xp_y - 0 - 0 - yp_x = L_z \end{aligned}$$

Dowód Twierdzenia Poissona-Jacobiego

$$\frac{dF_1}{dt} = (F_1, H) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \longrightarrow \frac{d(F_1, F_2)}{dt} = ((F_1, F_2), H) + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t}$$

Z tożsamości Jacobiego $(F_1, (F_2, F_3)) + (F_2, (F_3, F_1)) + (F_3, (F_1, F_2)) = 0$

$$F_3 = H \longrightarrow (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + (H, (F_1, F_2)) = 0$$

$$((F_1, F_2), H) = -(H, (F_1, F_2)) = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = (F_1, (F_2, H)) - (F_2, (F_1, H))$$

F_1, F_2 - stałe ruchu $\longrightarrow \frac{dF_1}{dt} = \frac{dF_2}{dt} = 0$ $((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) - (F_2, (F_1, H))$

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= (F_1, H) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \longrightarrow (F_1, H) = -\frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{dF_2}{dt} &= (F_2, H) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \longrightarrow (F_2, H) = -\frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((F_1, F_2), H) &= -\left(F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) + \left(F_2, \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) = \\ &= -\left(F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\right) = -\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{d(F_1, F_2)}{dt} = ((F_1, F_2), H) + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} = -\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial t} = 0$$

(F_1, F_2) stałą ruchu

Niektóre zalety formalizmu opartego na równaniach Hamiltona

Wprowadzając wektory 2f wymiarowe

$$z = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{bmatrix} \quad h(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial q_f} \end{bmatrix}$$

równania Hamiltona

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

można zapisać w zwartej postaci $\dot{z} = h(z, t)$

Inne zalety formalizmu opartego na równaniach Hamiltona wynikają z

- 1) łatwiejszej analizy układów, dla których występują współrzędne cykliczne
- 2) możliwości elastycznego wyboru współrzędnych i pędów traktowanych jako zmienne niezależne (transformacje kanoniczne)
- 3) ciekawych własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej użytecznych m.in. przy badaniu układów chaotycznych oraz własności statystycznych układów złożonych z wielu jednakowych obiektów
- 4) możliwości łatwiejszego sformułowania metody znajdowania rozwiązań przybliżonych równań ruchu
- 5) tego iż funkcja Hamiltona po dokonaniu zamiany współrzędnych i pędów na operatory tych wielkości i dokonanie jej zamiany w ten sposób na operator Hamiltona stanowi podstawę przy formułowaniu opisu układów w ramach mechaniki kwantowej

Przykłady wykorzystania formalizmu kanonicznego do opisu układów dla których można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony

Przykład. Cząstka o masie m poruszająca się po powierzchni kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R w polu siły ciężkości (wahadło sferyczne)

Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Ruch po powierzchni $\rightarrow$ liczba stopni swobody $f=2$

Za współrzędne uogólnione można przyjąć 2 z 3 współrzędnych w sferycznym układzie współrzędnych a mianowicie kąt biegunowy θ i azymutalny φ .

Związek współrzędnych w układzie kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

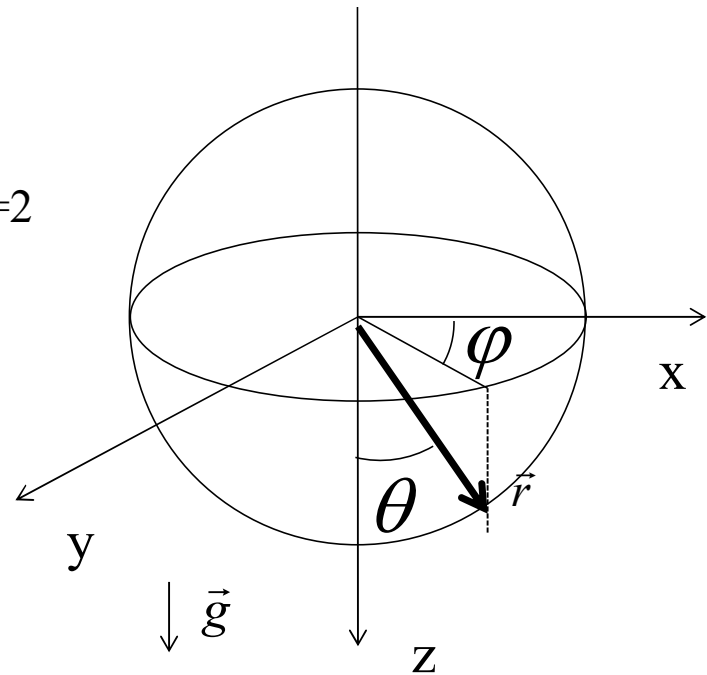
$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Można łatwo pokazać iż równanie więzów jest spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych z zakresu ich zmienności i współrzędne te jednoznacznie określają położenie punktu na powierzchni kuli

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta - R^2 =$$

$$R^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R^2 \cos^2 \theta - R^2 = R^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0$$



Określenie energii kinetycznej we współrzędnych uogólnionych

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - R \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = R \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + R \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$z = R \cos \theta \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \dot{\theta} = -R \sin \theta \dot{\theta}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \left(R^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \right. \\ \left. - 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + 2R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} \right. \\ \left. + R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) =$$

$$= \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Do powyższego wzoru można dojść także prościej rozważając ruch ciała w układzie sferycznym współrzędnych, w którym do opisu położenia w przestrzeni służą 3 zmienne r, θ, φ

W tym układzie równanie więzów przyjmuje postać $f = r - R = 0$

Nie prowadzi ona żadnych ograniczeń na współrzędne θ, φ które są dobrymi współrzędnymi uogólnionymi

Składowe prędkości w układzie sferycznym $v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r\dot{\theta}$ $v_\phi = r \sin \theta \dot{\phi}$

Uwzględniając warunek $r = R = \text{const}$ z którego wynika m.in. iż $\dot{r} = 0$

otrzymujemy iż $v_r = 0$ $v_\theta = R\dot{\theta}$ $v_\phi = R \sin \theta \dot{\phi}$

$$T = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2) = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$
$$= \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

W dalszych rozważaniach przyjmijmy iż os Oz jest skierowana pionowo do dołu.
Wówczas składowe siły ciężkości w układzie kartezjańskim dane są wzorem

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = mg$$

Określenie potencjału

$$\left(\begin{array}{l} F_x = 0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = 0 = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = mg = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right) \Rightarrow V = -mgz$$

We współrzędnych uogólnionych

$$V = -mgz = -mgR \cos \theta$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgR \cos(\theta)_{\theta, \phi} \quad \text{-współrzędne uogólnione}$$

Pędy uogólnione

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} \quad p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Obliczenie funkcji G (uogólnionej energii)

$$\begin{aligned} G &= \sum_{l=1}^f p_l(q, \dot{q}, t) \dot{q}_l - L(q, \dot{q}, t) = p_{\theta} \dot{\theta} + p_{\phi} \dot{\phi} - L = \\ &= mR^2 \dot{\theta}^2 + mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgR \cos(\theta) = \\ &= \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgR \cos(\theta) = T + V \end{aligned}$$

Wyznaczenie funkcji Hamiltona i sprawdzenie czy jest stałą ruchu

Ponieważ związki między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi (przyjętymi jako współrzędne uogólnione) nie zależą od czasu, a potencjał nie zależy od prędkości (czyli nie jest to potencjał uogólniony) to uogólniona energia G równa co do wartości funkcji Hamiltona H jest równa całkowitej energii mechanicznej ciała

W tym przypadku do policzenia funkcji Hamiltona nie trzeba korzystać koniecznie

ze wzoru ogólnego
$$H = \sum_{l=1}^f p_l \dot{q}_l(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t))$$

ale można skorzystać ze wzoru uproszczonego
$$H = T(q, \dot{q}(q, p, t)) + V(q, t)$$

Uwzględniając to iż

$$p_\theta = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} H = T + V &= \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - mgR \cos \theta = \frac{m}{2} R^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 R^4} + \\ &+ \frac{m}{2} R^2 \sin^2(\theta) \frac{p_\varphi^2}{m^2 R^4 \sin^4(\theta)} - mgR \cos(\theta) = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta) \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ to funkcja Hamiltona jest stałą ruchu .

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$$

Powyższy wniosek można było wyciągnąć także biorąc pod uwagę fakt iż funkcja

Lagrange'a nie zależała jawnie od czasu
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Funkcja Hamiltona

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta)$$

Równania Hamiltona

$$\begin{aligned} \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \Rightarrow \quad & \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \\ & \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \Rightarrow \quad & \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^3 \theta} \cos \theta - mgR \sin(\theta) \\ & \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{const} \end{aligned}$$

Relacje identyczne z tymi definiującymi pędy uogólnione poprzez pochodne z funkcji Lagrange'a po współrzędnych uogólnionych

Pęd uogólniony $p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ związany ze współrzędną cykliczną φ **jest stałą (całką) ruchu**. Znajomość warunków początkowych ruchu pozwala określić jego wartość, co dalej pozwala przy znanej postaci zależności $\theta(t)$ określić zależność $\varphi(t)$ rozwiązując jedno równanie różniczkowe rzędu pierwszego

Uwzględnienie tego faktu pozwala także rozwiązać układ równań

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^3 \theta} \cos \theta - mgR \sin(\theta)$$

wyznaczający zależność $\theta(t), p_\theta(t)$ bez znajomości zależności od czasu $\varphi(t)$

Ponieważ θ nie jest współrzędną cykliczną to pęd związany z tą współrzędną

$$p_\theta = mR^2 \dot{\theta} \quad \text{nie jest całką ruchu.}$$

Czym jest pęd uogólniony p_φ

Pokażemy iż $p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ jest z-ową składową momentu pędu cząstki

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = R \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - R \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = R \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + R \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$z = R \cos \theta \Rightarrow \dot{z} = -R \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} L_z = xp_y - yp_x &= m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = m\left(R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \dot{\theta} + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \dot{\varphi} + \right. \\ &\left. - R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \dot{\theta} + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \dot{\varphi}\right) = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = p_\varphi \end{aligned}$$

Wykorzystując to iż z-towa składowa momentu pędu jest całką ruchu

$$L_z = p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const}$$

można wzór na funkcję Hamiltona przepisać w postaci

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta) = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2(\theta)} \right) - mgR \cos(\theta) = \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)} - mgR \cos(\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + V_{ef}(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } V_{ef}(\theta) = \frac{L_z^2}{2mR^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)} - mgR \cos(\theta)$$

Ma on zbliżoną postać do postaci funkcji Hamiltona dla cząstki poruszającej się w przestrzeni jednowymiarowej w polu o efektywnym potencjale $V_{ef}(\theta)$

Ponieważ liczbowo funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii ciała, która jest

całką ruchu $H = \text{const} = E$, zaś $\frac{p_\theta^2}{2mR^2} \geq 0$ to ruch ciała może zachodzić tylko w

obszarze w którym $E \geq V_{ef}(\theta)$

W ogólności gdy $L_z \neq 0$ to w czasie ruchu zachodzi relacja

$$0 < \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} < \pi \quad \text{gdym } \lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} V_{ef}(\theta) = \infty$$

Wniosek dodatkowy z przykładu

Gdy wśród f współrzędnych uogólnionych k współrzędnych jest współrzędnymi cyklicznymi (czyli funkcje Lagrange'a i Hamiltona od nich nie zależą) to funkcja Hamiltona zależy tylko od $f-k$ współrzędnych i pędów zależnych od czasu (może też jawnie zależeć od czasu). Pozostałe k pędów (sprzężonych kanonicznie ze współrzędnymi cyklicznymi) występujących w funkcji Hamiltona jest stałymi ruchu i można je wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.

Np. gdy funkcja Lagrange'a ma postać $L = L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

to $\dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 = \text{const}$

i funkcja Hamiltona zależy tylko od 2 zmiennych zależnych od czasu :

współrzędnej q_1 i pędu $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ (w przykładzie θ oraz p_θ)

Powyższe uproszczenie nie zachodzi dla funkcji Lagrange'a gdyż z tego iż

$$p_2 = \text{const} \quad \text{nie wynika iż} \quad \dot{q}_2 = \text{const}$$

W ogólności może zachodzić $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \neq \text{const}$ nawet wtedy gdy $p_2 = \text{const}$

(w przykładzie $\dot{\varphi} \neq \text{const}$ mimo tego iż $p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z = \text{const}$)

Analiza zależności $\theta(t)$, $p_\theta(t)$ i $\varphi(t)$ (dla zainteresowanych)

W celu wyznaczenia $\theta(t)$ i $p_\theta(t)$ trzeba rozwiązać układ równań różniczkowych rzędu 1

$$\dot{p}_\theta = \frac{L_z^2}{mR^2 \sin^3 \theta} \cos \theta - mgR \sin(\theta) \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (2)$$

Postać rozwiązania zależy od warunków początkowych ruchu $\theta(t=0)=\theta_0$ oraz $p_\theta(t=0)=p_{\theta 0}$. Od wartości tych warunków początkowych zależy energia ciała

$$E = H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)} - mgR \cos(\theta) \quad (3)$$

którą można określić zapisując równanie (3) dla chwili $t=0$:

$$E = \frac{p_{\theta 0}^2}{2mR^2} + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2(\theta_0)} - mgR \cos(\theta_0) \quad (4)$$

Odwracając tę relację można uzależnić $p_{\theta 0}$ od E i θ_0 z dokładnością do znaku.

Postępując w ten sposób możemy badać ruch układu w zależności od L_z , E , θ_0

W celu wyznaczenia zależności $\theta(t)$ można też wykorzystać zamiast równań (1) i (2) równanie powstałe z równania (3) po wstawieniu do niego relacji $p_\theta = mR^2 \dot{\theta}$ wynikającej z równania (2) mające też postać równania różniczkowego

$$\text{rzędu 1: } E = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)} - mgR \cos(\theta) \quad (5)$$

W celu przeprowadzenia dalszej dyskusji wprowadzamy nową zmienną $u = \cos \theta$

Wówczas $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta} = -\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \dot{\theta} = -\sqrt{1 - u^2} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}} \Rightarrow p_{\theta} = -\frac{mR^2}{\sqrt{1 - u^2}} \dot{u}$

Równanie (5)
$$E = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2(\theta)} - mgR \cos(\theta)$$

przyjmuje postać
$$E = \frac{mR^2 \dot{u}^2}{2(1 - u^2)} + \frac{L_z^2}{2mR^2(1 - u^2)} - mgRu$$

Po jego obustronnym pomnożeniu przez $\frac{2}{mR^2}$

wprowadzeniu nowych stałych $P = \frac{L_z}{mR^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ oraz $\varepsilon = \frac{2E}{mR^2}$ można je zapisać

w postaci
$$\varepsilon = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{P^2}{1 - u^2} - 2\omega_0^2 u \quad (6)$$

Założmy dalej **szczególne warunki początkowe ruchu** iż $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}(t=0) = 0$ czyli też

$p_{\theta 0} = 0$. Wówczas $u_0 = u(t=0) = 0, \dot{u}_0 = \dot{u}(t=0) = 0$

Równanie (6) zapisane dla $t=0$

$$\varepsilon = \frac{\dot{u}_0^2}{1 - u_0^2} + \frac{P^2}{1 - u_0^2} - 2\omega_0^2 u_0 = P^2$$

będzie spełnione przy tym założeniu gdy $\varepsilon = P^2 \Leftrightarrow \frac{2E}{mR^2} = \frac{L_z^2}{m^2 R^4} \Leftrightarrow E = \frac{L_z^2}{2mR^2}$

Równanie (5) przyjmuje postać $P^2 = \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{P^2}{1-u^2} - 2\omega_0^2 u$

Można je zapisać w postaci

$$\dot{u}^2 = (P^2 + 2\omega_0^2 u)(1-u^2) - P^2 \Rightarrow \dot{u}^2 = u(-2\omega_0^2 u^2 - P^2 u + 2\omega_0^2) = f(u) \quad (7)$$

Ma ono rozwiązanie dla takich u dla których wielomian

$$f(u) = u(-2\omega_0^2 u^2 - P^2 u + 2\omega_0^2) \geq 0$$

Pierwiastkami tego wielomianu są liczby

$$u_1 = \frac{-\sqrt{P^4 + 16\omega_0^4} - P^2}{4\omega_0^2} < -1, u_2 = 0, u_3 = \frac{\sqrt{P^4 + 16\omega_0^4} - P^2}{4\omega_0^2} < 1 \quad \text{Zal. } L_z \neq 0$$

Nierówność $f(u) \geq 0$ jest spełniona gdy $u \leq u_1$ lub $u_2 \leq u \leq u_3$

Ponieważ $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ to ruch ciała zachodzić może tylko dla

$$u = \cos(\theta) \quad \text{takiego} \quad \text{iz} \quad 0 = u_2 \leq u \leq u_3 < 1 \quad \text{czyli} \quad 0 < \theta_{\min} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

gdzie $\theta_{\min} = \arccos(u_3)$

Zależność $u(t)$ oraz można określić rozwiązując np. numerycznie równanie ruchu

$$\dot{u}^2 = u(-2\omega_0^2 u^2 - P^2 u + 2\omega_0^2) = f(u) \quad (8)$$

pamiętając o zmianie znaku $\dot{u}$ po dojściu do punktu w którym $\dot{u} = 0$.
Jak widać postępując w ten sposób można znaleźć także zależności od czasu

$$\theta = \arccos(u) \text{ oraz } p_\theta = mR^2 \dot{\theta} = -\frac{mR^2}{\sqrt{1-u^2}} \dot{u}$$

Funkcja $u(t)$ jest przy tym funkcją okresową z okresem, który uwzględniając równanie wynikające z równania (7) $dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$

$$\text{można określić licząc całkę eliptyczną } T = 2 \int_0^{u_3} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = 2 \int_0^{u_3} \frac{du}{\sqrt{u(-2\omega_0^2 u^2 - P^2 u + 2\omega_0^2)}}$$

której wartość można określić np. przy pomocy metod numerycznych.

Po znalezieniu zależności $\theta(t)$ zależność $\varphi(t)$ można określić wykorzystując relację:

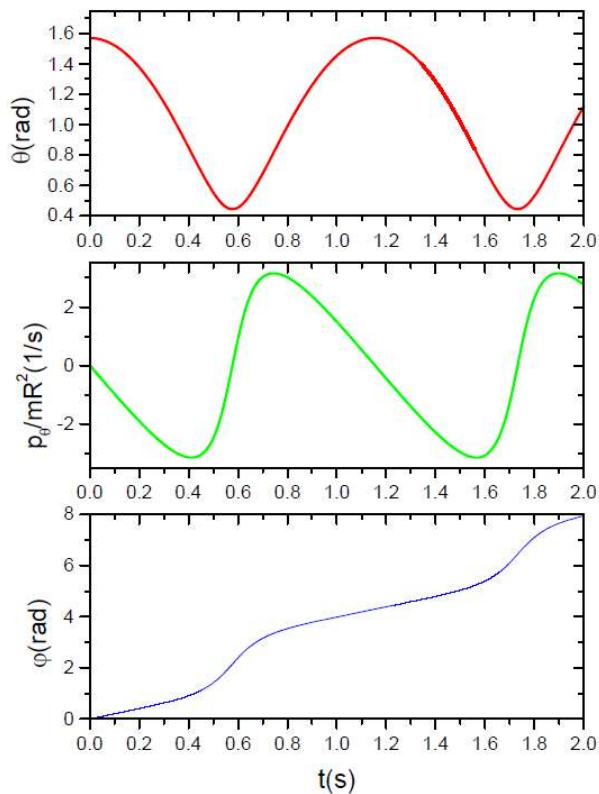
$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mR^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(t=0) + \frac{L_z}{mR^2} \int_0^t \frac{1}{\sin^2(\theta(t))} dt$$

Obliczenie szukanej zależności można np. sprowadzić do policzenia całki, którą można wyznaczyć przy pomocy metod numerycznych. Okres zmian kąta φ nie musi być równy wielokrotności lub podwielokrotności zmian kąta θ czyli ruch nie musi być okresowy

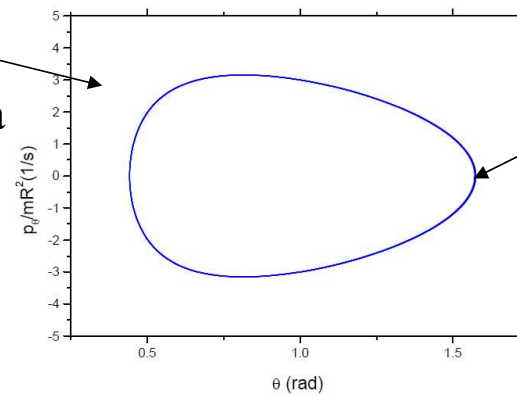
Rysunek gdy np. $R=1\text{m}$, $m=1\text{kg}$, $L_z=2.0\text{N}\cdot\text{m}$, $\theta(t=0)=\frac{\pi}{2}$ $\dot{\theta}(t=0)=0$

W takim przypadku $P = \frac{L_z}{mR^2} = 2 \frac{1}{s}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{9,81} \frac{1}{s}$ $\varepsilon = \frac{2E}{mR^2} = P^2 = 4 \frac{1}{s^2}$ $E = 2J$,

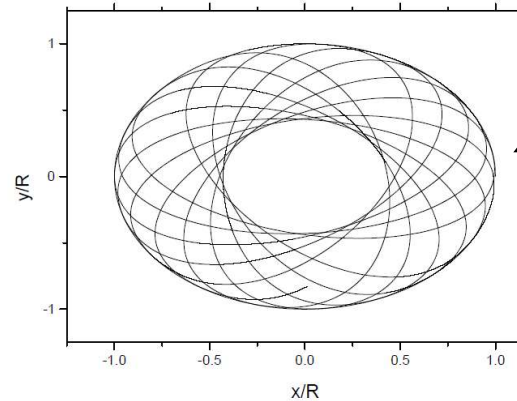
$$u_3 = \frac{\sqrt{P^4 + 16\omega_0^4} - P^2}{4\omega_0^2} = 0,90 \quad \theta_{\min} = \arccos(u_3) = 0.45\text{rad} \quad x_{\max} = y_{\max} = 1\text{m} \quad x_{\min} = y_{\min} = R \sin(\theta_{\min}) = 0.43\text{m}$$



Krzywa zamknięta ponieważ



Przekrój trajektorii w przestrzeni fazowej (to że krzywa na rysunku się nie przecina wynika z własności badanego układu) Pełna trajektoria w ogólności nie musi być krzywą zamkniętą



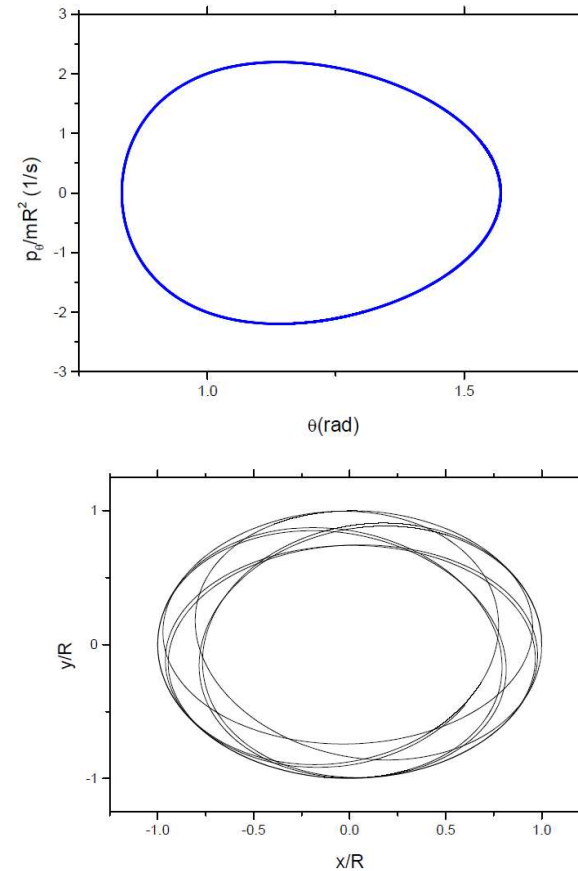
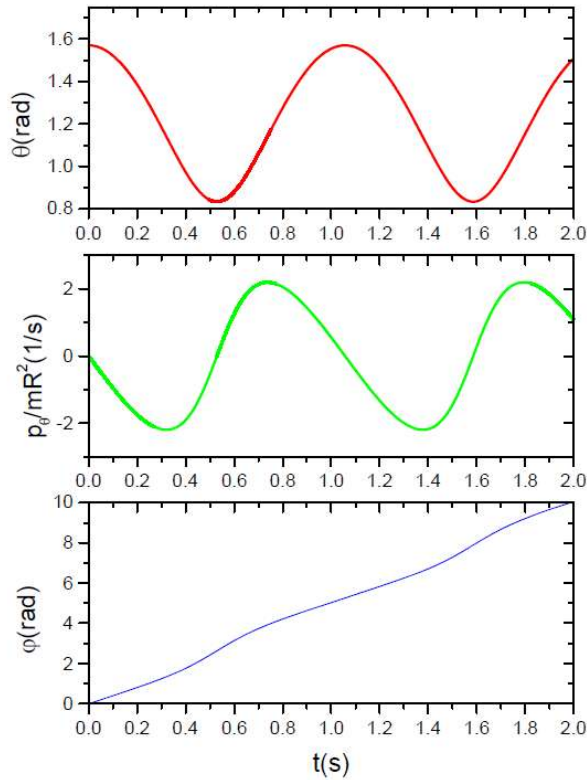
Przekrój trajektorii w przestrzeni konfiguracyjnej

Zależności $\theta(t)$, $p_\theta(t)$ są dane funkcjami okresowymi o tym samym okresie T . Zależności $x(t)$ i $y(t)$ nie są dane funkcjami okresowymi, gdyż okres zmian kąta φ nie musi być wielokrotnością lub podwielokrotnością zmian kąta θ

Rysunek dla przypadku gdy $R=1m$, $m=1kg$, $L_z=4.0N*m$, $\theta(t=0)=\frac{\pi}{2}$ $\dot{\theta}(t=0)=0$

W takim przypadku $P = \frac{L_z}{mR^2} = 4 \frac{1}{s}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{9,81} \frac{1}{s}$ $\varepsilon = \frac{2E}{mR^2} = P^2 = 16 \frac{1}{s^2}$ $E = 8J$,

$$u_3 = \frac{\sqrt{P^4 + 16\omega_0^4} - P^2}{4\omega_0^2} = 0,67 \quad \theta_{\min} = \arccos(u_3) = 0.83rad \quad x_{\max} = y_{\max} = 1m \quad x_{\min} = y_{\min} = R \sin(\theta_{\min}) = 0.74m$$



Przykład. Elektron o ładunku $e < 0$ w polu elektromagnetycznym opisanym przez potencjał skalarny $\varphi = V(r)$ ($r = |\vec{r}|$) oraz wektorowy $\vec{A} = -\frac{By}{2}\vec{i} + \frac{Bx}{2}\vec{j}$

-wyznaczenie funkcji Hamiltona oraz całek ruchu w biorąc za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie cylindrycznym (częściowo do samodzielnej analizy)

Elektron porusza się w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wzdłuż

osi Oz gdyż

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{By}{2} & \frac{Bx}{2} & 0 \end{vmatrix} = B\vec{k} = [0, 0, B]$$

oraz polu elektrycznym $\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{e}_\rho - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$

gdzież $V = V(r) = V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = V(\rho, z)$

Uwzględniając relację

$$x = \rho \cos(\varphi) \quad y = \rho \sin(\varphi) \quad \vec{e}_\rho = \vec{i} \cos(\varphi) + \vec{j} \sin(\varphi) \quad \vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin(\varphi) + \vec{j} \cos(\varphi)$$

potencjał wektorowy można zapisać w układzie cylindrycznym :

$$\vec{A} = -\frac{By}{2}\vec{i} + \frac{Bx}{2}\vec{j} = \frac{B}{2}[-\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}] = \frac{B\rho}{2} \vec{e}_\varphi \quad A_\rho = 0, A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, A_z = 0$$

Uwzględniając wzory na składowe prędkości w układzie cylindrycznym

$$v_\rho = \dot{\rho} \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \quad v_z = \dot{z}$$

energia kinetyczna elektronu jest równa

$$T = \frac{m}{2} (v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Potencjał uogólniony U jest równy

$$\begin{aligned}
 U &= eV(r) - e\vec{v} \cdot \vec{A} = eV(\rho, z) - e(v_\rho A_\rho + v_\varphi A_\varphi + v_z A_z) \xrightarrow{A_\rho=0, A_z=0} eV(\rho, z) - ev_\varphi A_\varphi \xrightarrow{A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, v_\varphi = \rho\dot{\varphi}} eV(\rho, z) - \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \\
 U &= eV(r) - e\vec{v} \cdot \vec{A} = eV(r) - e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) = eV(r) - \frac{eB}{2} (-\dot{x}y + \dot{y}x) = \\
 &= eV(r) - \frac{eB}{2m} L_z = eV(\rho, z) - \frac{eB}{2m} m\rho^2 \dot{\varphi} = eV(\rho, z) - \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \quad \left(A_x = -\frac{By}{2} \quad A_y = \frac{Bx}{2} \quad A_z = 0 \right)
 \end{aligned}$$

$L_z = m(xy\dot{-} y\dot{x}) = m\rho^2 \dot{\varphi}$ - z- towa składowa momentu pędu mechanicznego,

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\varphi}$$

Na ruch elektronu nie nałożono więzów ρ, φ, z – współrzędne uogólnione

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\phi}$$

Pędy uogólnione związane ze współzrędnymi uogólnionymi ρ, ϕ, z

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi} + \frac{eB}{2} \rho^2 \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Obliczenie funkcji G $G = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L$

$$\begin{aligned} G &= p_\rho \dot{\rho} + p_\phi \dot{\phi} + p_z \dot{z} - L = \\ &= m\dot{\rho}^2 + m\rho^2 \dot{\phi}^2 + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\phi} + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z) - \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\phi} = \\ &= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z) = T + eV(\rho, z) \end{aligned}$$

Widać iż funkcja G (równa co do wartości funkcji Hamiltona) **nie** jest równa $T+U$ tylko sumie energii kinetycznej i potencjału skalarnego mnożonego przez ładunek cząstki. W przypadku gdy potencjał skalarny nie występuje ($V=0$) funkcja G jest równa energii kinetycznej ciała.

W celu znalezienia funkcji Hamiltona trzeba wyrazić funkcje G jako funkcje współzrędných i pędów uogólnionych tak by nie zawierała prędkości uogólnionych.

Obliczenie funkcji Hamiltona H

$$p_\rho = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eB}{2}\rho^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{eB}{2m} = \frac{1}{m\rho} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{eB}{2}\rho \right) = \frac{1}{m\rho} \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - A_\varphi \right)$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{eB}{2}\rho \right)^2 + p_z^2 \right] + eV(\rho, z)$$

Ponieważ $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ to H jest stałą ruchu. Widać ponadto iż H ma postać

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p}_u - e\vec{A})^2 + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m} \left[(p_{u\rho} - eA_\rho)^2 + (p_{u\varphi} - eA_\varphi)^2 + (p_{uz} - eA_z)^2 \right] + eV(\rho, z)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[(p_\rho - eA_\rho)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - eA_\varphi \right)^2 + (p_z - eA_z)^2 \right] + eV(\rho, z)$$

gdzie $p_{u\rho}, p_{u\varphi}, p_{uz}$ składowe w układzie cylindrycznym wektora $\vec{p}_u = m\vec{v} + e\vec{A}$

p_ρ, p_φ, p_z - pędy związane ze współrzędnymi uogólnionymi ρ, φ, z ; $A_\rho = 0, A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, A_z = 0$

$$\text{gdyż} \quad p_\varphi = p_{ux} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + p_{uy} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + p_{uz} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -p_{ux}\rho \sin \varphi + p_{uy}\rho \cos \varphi = \rho \vec{p}_u \cdot \vec{e}_\varphi = \rho p_{u\varphi}$$

$$p_\rho = p_{ux} \frac{\partial x}{\partial \rho} + p_{uy} \frac{\partial y}{\partial \rho} + p_{uz} \frac{\partial z}{\partial \rho} = p_{ux} \cos \varphi + p_{uy} \sin \varphi = \vec{p}_u \cdot \vec{e}_\rho = p_{u\rho} \quad \vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin(\varphi) + \vec{j} \cos(\varphi)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{eB}{2} \rho \right)^2 + p_z^2 \right] + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - eB p_\varphi + \frac{e^2 B^2}{4} \rho^2 + p_z^2 \right] + eV(\rho, z)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{e^2 B^2}{4m} \rho - e \frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{eB}{2m} \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -e \frac{\partial V}{\partial z}$$

p_z jest stałą ruchu gdy $V = V(\rho)$ czyli potencjał skalarny nie zależy od z

$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{eB}{2} \rho^2$ jest stałą ruchu i reprezentuje z-tową składową uogólnionego

momentu pędu czyli wektora $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_u = \vec{r} \times (\vec{p} + e\vec{A}) = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}} + e\vec{A})$

gdyż $(\vec{r} \times \vec{A})_z = xA_y - yA_x = x \frac{By}{2} + y \frac{-Bx}{2} = \frac{B}{2} (x^2 + y^2) = \frac{B}{2} \rho^2$

Przybliżona postać funkcji Hamiltona dla przypadku słabego pola magnetycznego

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - eBp_\varphi + \frac{e^2 B^2}{4} \rho^2 + p_z^2 \right] + eV(\rho, z) \approx \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - eBp_\varphi + p_z^2 \right] + eV(\rho, z)$$

Opis przy wykorzystaniu zmiennych ρ, α, z służących do opisu ruchu w układzie odniesienia obracającym się wokół osi OZ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z częstością Larmora $\omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|B}{2m}$ (dla zainteresowanych)

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\varphi}$$

Wprowadzamy nową zmienną $\alpha = \varphi - \omega t \Rightarrow \varphi = \alpha + \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \omega$

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + 2\rho^2 \dot{\alpha} \omega + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\alpha} + \frac{eB}{2} \rho^2 \omega =$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + 2\rho^2 \dot{\alpha} \omega + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) - m\omega \rho^2 \dot{\alpha} - m\rho^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 - \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z)$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$p_\alpha = m\rho^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m\rho^2}$$

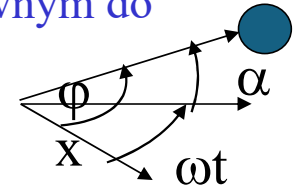
$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

Przybliżona postać funkcji Hamiltona dla przypadku słabego pola magnetycznego

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - eBp_\varphi + \frac{e^2 B^2}{4} \rho^2 + p_z^2 \right] + eV(\rho, z) \approx \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} - eBp_\varphi + p_z^2 \right] + eV(\rho, z)$$

Opis przy wykorzystaniu zmiennych ρ, α, z służących do opisu ruchu w układzie odniesienia obracającym się wokół osi OZ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z częstością Larmora $\omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|B}{2m}$

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\varphi}$$



Wprowadzamy nową zmienną $\alpha = \varphi - \omega t \Rightarrow \varphi = \alpha + \omega t \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \omega$

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + 2\rho^2 \dot{\alpha} \omega + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2} \rho^2 \dot{\alpha} + \frac{eB}{2} \rho^2 \omega =$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + 2\rho^2 \dot{\alpha} \omega + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z) - m\omega \rho^2 \dot{\alpha} - m\rho^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 - \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) - eV(\rho, z)$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$p_\alpha = m\rho^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m\rho^2}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$G = p_\rho \dot{\rho} + p_\alpha \dot{\alpha} + p_z \dot{z} - L = m\dot{\rho}^2 + m\rho^2 \dot{\alpha}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 - \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z) =$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad p_\alpha = m\rho^2 \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m\rho^2} \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \rho^2 \omega^2 + \dot{z}^2) + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2 \right] + \frac{m\rho^2 \omega^2}{2} + eV(\rho, z) =$$

$$= \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2 \right] + \frac{e^2 B^2 \rho^2}{8m} + eV(\rho, z) \approx \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2 \right] + eV(\rho, z)$$

slabe pola magnetyczne

$$\omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|\hbar B}{2m}$$

Dla elektronu w atomie (traktowanego klasycznie) poruszającego się w płaszczyźnie $z=0$ pod wpływem siły centralnej pochodzącej np. od jądra mamy

$$H \approx \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} \right] + eV(\rho) \stackrel{\rho=r}{=} \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\alpha^2}{r^2} \right] + eV(r)$$

W układzie obracającym się z częstością Larmora w przypadku gdy pole magnetyczne jest słabe funkcja Hamiltona jest taka jakby pola magnetycznego nie było. Obecność pola prowadzi więc w pierwszym przybliżeniu do precesji orbit elektronu z częstością Larmora.

$$\omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|\hbar B}{2m}$$