Formalizm kanoniczny-cz.3

Analiza wybranych prostych trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

Twierdzenie Liouville'a

Wyznaczenie trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

Potencjał $V(x)=\frac{kx^2}{2}$ Energia kinetyczna $T=\frac{m\dot{x}^2}{2}$

x- współrzędna uogólniona

Funkcja Lagrange'a $L=T-V=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}$ Pęd uogólniony $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\Rightarrow \dot{x}=\frac{p_x}{m}$

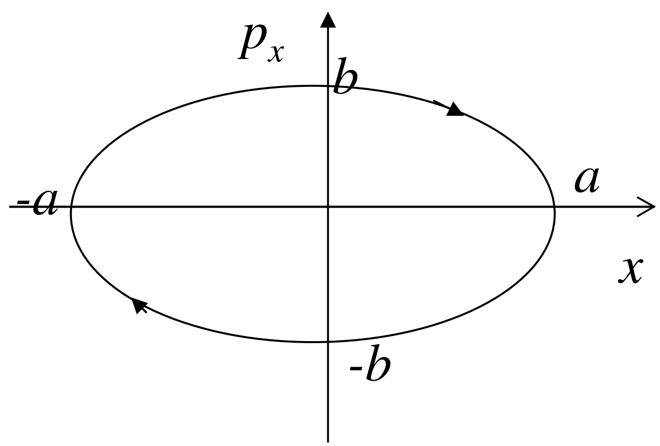
Funkcja Hamiltona $\boxed{H}=T+V=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\boxed{\frac{p_x^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}}=E=const$ bo $\frac{\partial H}{\partial t}=0$

Równanie trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

$$E=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}\Rightarrow\frac{p_x^2}{2mE}+\frac{kx^2}{2E}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{p_x^2}{2mE}+\frac{x^2}{\frac{2E}{k}}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{p_x^2}{b^2}=1$$ (równanie elipsy) gdzie $a=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ $b=\sqrt{2mE}$

Dla analizowanego oscylatora trajektorie w pełni określa jego całkowita energia mechaniczna. Jest to słuszne dla układów o 1 stopniu swobody



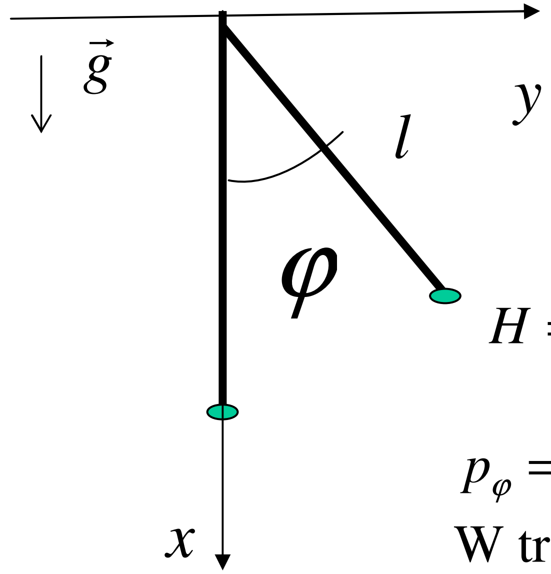
Pole elipsy $A=\pi ab=2\pi\frac{E}{\omega}=2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}}$

Równania Hamiltona $\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$ $\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx$

Położenia równowagi stabilne (trwałe) $x=0, p_x=0$

Wahadło matematyczne o długości l poruszające się w płaszczyźnie z=0

φ - współrzędna uogólniona



Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}v_\varphi^2 - (-mgx) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

Pęd uogólniony $\quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$

Funkcja Hamiltona

$$H = T + V = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = \boxed{\frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E} = const$$

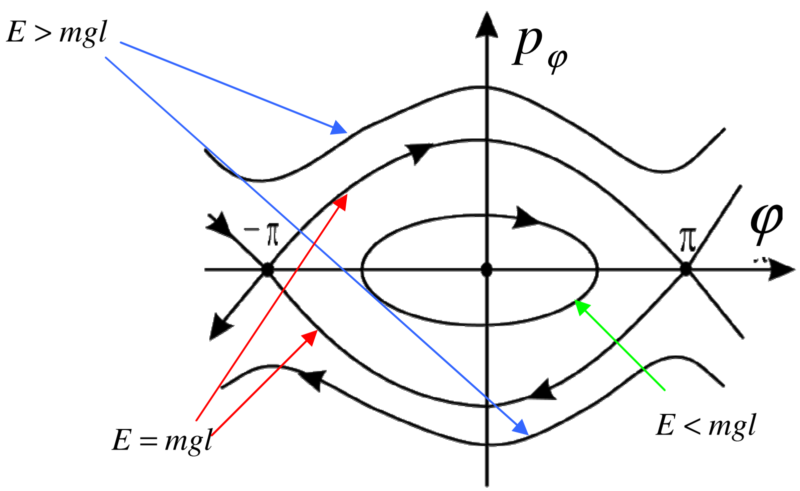
$$p_\varphi = \pm\sqrt{2ml^2\left(E + mgl\cos\varphi\right)}$$

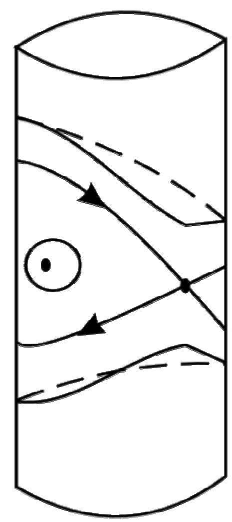
Równanie trajektorii

W trakcie ruchu musi być spełniony warunek $E \geq -mgl\cos(\varphi)$

czyli najmniejsza dopuszczalna energia jest równa $E=-mgl$

Gdy $E \leq mgl$ to ruch ciała odbywa się z zakresie $-\varphi_{\max} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$ gdzie $\varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{E}{mgl}\right)$





Równania Hamiltona

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

Położenia równowagi

$\varphi = 0,\ p_\varphi = 0$ -trwałe

$\varphi = \pi(-\pi),\ p_\varphi = 0$ -niestabilne

Dygresja: Zależność kata od czasu dla wahadła matematycznego w przypadku następujących warunków początkowych ruchu $\varphi(t=0)=0$ $\quad (\dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0=\sqrt{\frac{2E}{ml^2}})$

$$1)\ E=mgl \Rightarrow \varphi(t)=4arctg\left[\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right]-\pi \qquad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\pi$$

$$2)\ E>mgl \qquad \Rightarrow \varphi(t)=2am\left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2}t\right) \qquad \text{(ruch rotacyjny)}$$

$$\varphi(t)=2am\left(\frac{\dot{\varphi}_0}{2}t\right)\Rightarrow\frac{\dot{\varphi}_0}{2}t=F\left(\tilde{k},u=\frac{\varphi}{2}\right)=\int_0^{\varphi/2}\frac{du}{\sqrt{1-\tilde{k}^2\sin^2(u)}} \qquad \tilde{k}=\sqrt{\frac{4g}{l\dot{\varphi}_0^2}}$$

$F\left(\tilde{k},u=\frac{\varphi}{2}\right)$ -całka eliptyczna pierwszego rodzaju w postaci Legandrea,
am –funkcja zwana amplitudą (Rubinowicz)

$$2)\ -mgl<E<mgl \Rightarrow \varphi=2\arcsin(k\sin(u))=2\arcsin(k\sin(am(\tilde{\omega}t))) \quad \text{(ruch oscylacyjny)}$$

$$u=am(\tilde{\omega}t)\Rightarrow\tilde{\omega}t=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}}=F(k,u) \qquad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)=k\sin(u) \qquad \tilde{\omega}=\frac{\dot{\varphi}_0}{2k} \qquad k=\sqrt{\frac{l\dot{\varphi}_0^2}{4g}}<1$$

$$am(\xi+4F\left(k,\frac{\pi}{2}\right))=am(\xi)+2\pi$$

Okres drgań $\quad T=4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin(u)}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)k^2+\left(\frac{1*3}{2*4}\right)k^4+.....\right]$

Własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej

1) Trajektorie ruchu układów różniących się warunkami początkowymi ruchu nigdy się nie przecinają gdy opisująca je funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu. Gdy funkcja ta zależy jawnie od czasu to przez dany punkt w przestrzeni fazowej ***w ustalonej chwili czasu*** przechodzi także tylko jedna trajektoria.
2) W przypadku układu o jednym stopniu swobody gdy funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu to krzywa opisująca trajektorie ruchu w przestrzeni fazowej jest w pełni określona przez stałą w czasie wartość funkcji Hamiltona (zwykle energie) układu i zawarta jest na 1 wymiarowej hiperpowierzchnii w dwuwymiarowej przestrzeni fazowej. Gdy ruch odbywa się w skończonym obszarze jest to krzywa zamknięta i ruch jest okresowy.
3) W przypadku układu o f stopniach swobody tor ruchu układu o określonej wartości funkcji Hamiltona (dla którego funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu) jest ograniczony tylko do hiperpowierzchnii $2f$-1 wymiarowej określonej w przestrzeni fazowej $2f$ wymiarowej i nie jest w pełni określony przez energie. Ograniczenie toru ruchu w przestrzeni fazowej takiego układu do hiperpowierchnii jednowymiarowej jest możliwe tylko w przypadku gdy znanych jest $2f$-1 niezależnych całek ruchu (razem z energią). Wówczas w przypadku ruchu odbywającego się w skończonym obszarze tor w przestrzeni fazowej ma postać krzywej zamkniętej i ruch jest okresowy.
   Wszystkie te całki znane są tylko dla wybranych układów np. oscylatora izotropowego poruszającego się pod wpływem siły wypadkowej $\vec{F} = -k\vec{r}$ (całki ruchu: energia związana z ruchem wzdłuż dwóch prostopadłych osi i moment pędu) czy też ciała poruszającego się pod wpływem siły centralnej o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości od centrum siły (całki ruchu: energia, moment pędu i składowa wektora Rungego-Lenza).
4) Zwykle liczba m całek ruchu izolujących typu $F(q,p)=const$ jest mniejsza (często równa $m=f$) i ich istnienie powoduje tylko ograniczenie w $2f$ wymiarowej przestrzeni fazowej toru ruchu układu o określonej wartości tych całek do hiperpowierzchnii o wymiarze k zależnym od ilości całek ruchu ($k=2f-m$ wymiarowej, $k=f$ gdy $m=f$) . Wybór hiperpowierzchni zależy od wartości całek ruchu.

Własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej-kontynuacja

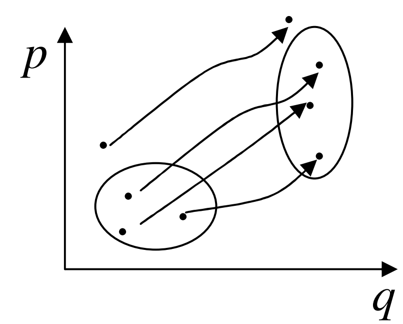
1) Trajektoria ruchu układów, których ruch jest periodyczny jest krzywą zamkniętą. W przypadku układów, których ruch nie jest periodyczny-trajektoria ruchu w przestrzeni fazowej nie jest krzywą zamkniętą, choć może być krzywą zawierającą się w skończonej objętości przestrzeni fazowej (np. gdy ruch układu jest ograniczony w przestrzeni). Układ wraca wówczas dowolnie blisko punktu początkowego po skończonym czasie ruchu o ile funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu.

2) Analizę trajektorie ruchu układów , których tor nie jest ograniczony do hiperpowierzchnii jednowymiarowej, często przeprowadza się badając pewne przekroje tych trajektorii przez pewne hiperpowierzchnie w przestrzeni fazowej, czyli analizując przekroje Poincare'a.

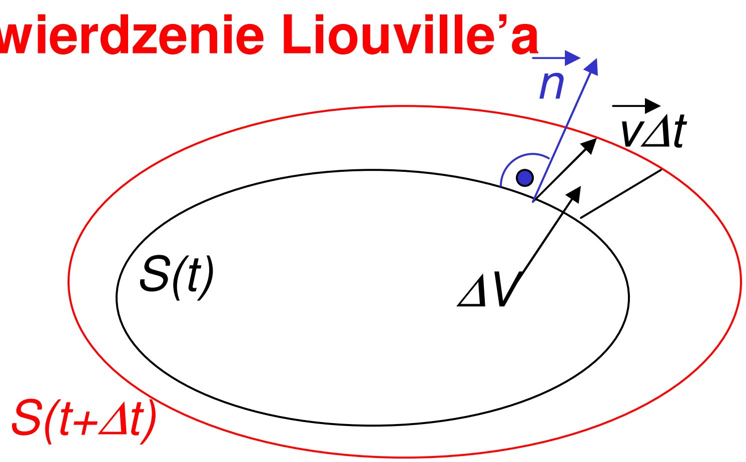
3) W przypadku układów opisywanych równaniami nieliniowymi kształt trajektorii zwykle silnie zależy od warunków początkowych ruchu.

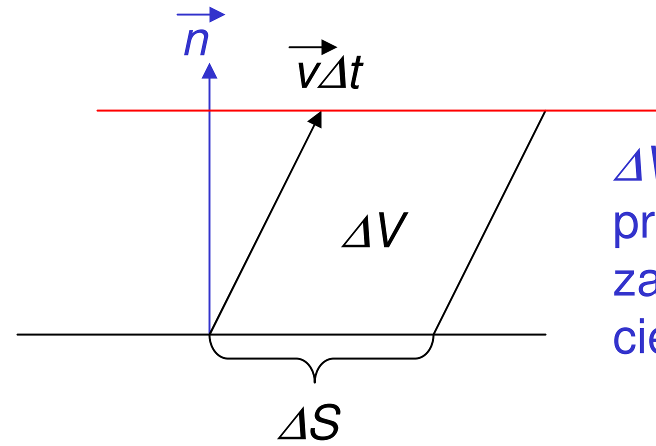
4) Gdy dla analizowanych układów możemy wprowadzić funkcje Hamiltona (czyli siły działające można zapisać przy pomocy potencjału lub potencjału uogólnionego) to objętość w przestrzeni fazowej zajmowanej przez jednakowe układy różniące się warunkami początkowymi ruchu (wartością współrzędnych uogólnionych i pędów z nimi sprzężonych określonych w chwili początkowej ruchu) nie ulega zmianie w trakcie ruchu tych układów (nawet wówczas gdy funkcja Hamiltona zależy jawnie od czasu) (twierdzenie Liouville'a).

Objętość ta ograniczona jest przez powierzchnie określoną przez punkty reprezentujące w przestrzeni fazowej jednakowe układy o określonych warunkach początkowych ruchu . W trakcie ruchu żaden punkt reprezentujący układ z wnętrza tej objętości jak i spoza tej objętości nie może przekroczyć tej powierzchni, a zatem ciecz złożona z takich punktów zachowuje się jak ciecz nieściśliwa.



Twierdzenie Liouville'a





ΔV -Elementarny przyrost objętości zajmowanej przez ciecz fazową

Rozważamy przestrzeń fazową dla układu dla którego można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony, opisanego zmiennymi (*q,p*), oraz zbiór warunków początkowych w chwili *t*, zawartych wewnątrz obszaru ograniczonego powierzchnią *S(t) o objętości* V_{tot}.

Zmiana całkowitej objętości w czasie *Δt*

$$\Delta V_{tot} = \sum_{\text{wszystkie } \Delta S} \Delta S\vec{n}\cdot\vec{v}\Delta t \Rightarrow \frac{dV_{tot}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0, \Delta S\to 0}\frac{\Delta V_{tot}}{\Delta t} = \oint_S dS\vec{n}\cdot\vec{v} = \oint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Z tw. Gaussa $\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{v}\,dV$

Strumień wektora przez powierzchnie zamkniętą jest równy całce z dywergencji tego wektora po objętości ograniczonej przez tą powierzchnie

Prędkość przemieszczania się po trajektorii fazowej

$$\vec{v} = \left(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f,\dot{p}_1,\dots\dots,\dot{p}_f\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\dots\dots\dots,\frac{\partial H}{\partial p_f},-\frac{\partial H}{\partial q_1},\dots\dots\dots,-\frac{\partial H}{\partial q_f}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \sum_l\left(\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_l}+\frac{\partial\dot{p}_l}{\partial p_l}\right) = \sum_l\left(\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)+\frac{\partial}{\partial p_l}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dV_{tot}}{dt} = 0}$$

Objętość dowolnego obszaru, przemieszczającego się w przestrzeni fazowej wzdłuż trajektorii fazowych jest stała (ciecz fazowa zachowuje się jak ciecz nieściśliwa)

Twierdzenie Liouville'a-przykład

Rozważmy ruch ciała o masie m na ruch którego nie nałożono więzów w polu siły ciężkości z osia Oz skierowaną pionowo w dół w przestrzeni jednowymiarowej

Funkcja Lagrange'a $$L=T-V=\frac{m}{2}\dot{z}^2+mgz$$

Pęd uogólniony $$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=m\dot{z}\Rightarrow \dot{z}=\frac{p_z}{m}$$

Funkcja Hamiltona

$$H(z,p_z)=T+V=\frac{m}{2}\dot{z}^2-mgz=\frac{p_z^2}{2m}-mgz=E=const$$

Trajektoria ruchu w przestrzeni fazowej z,p_z

$$p_z^2=2m(E+mgz)\Rightarrow p_z^2-2m^2gz-2mE=0$$ parabola zależna od E

Równania Hamiltona

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m} \longrightarrow \dot{z}=gt+\frac{p_{0z}}{m}\rightarrow z=\frac{gt^2}{2}+\frac{p_{oz}t}{m}+z_0$$

$$\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=mg\Rightarrow p_z=mgt+p_{oz}$$

$$p_{oz}=p_z(t=0)$$
$$z_0=z(t=0)$$

$$z=\frac{gt^2}{2}+\frac{p_{oz}t}{m}+z_0 \qquad p_z=mgt+p_{oz} \qquad \begin{array}{l} p_{oz}=p_z(t=0) \\ z_0=z(t=0) \end{array}$$

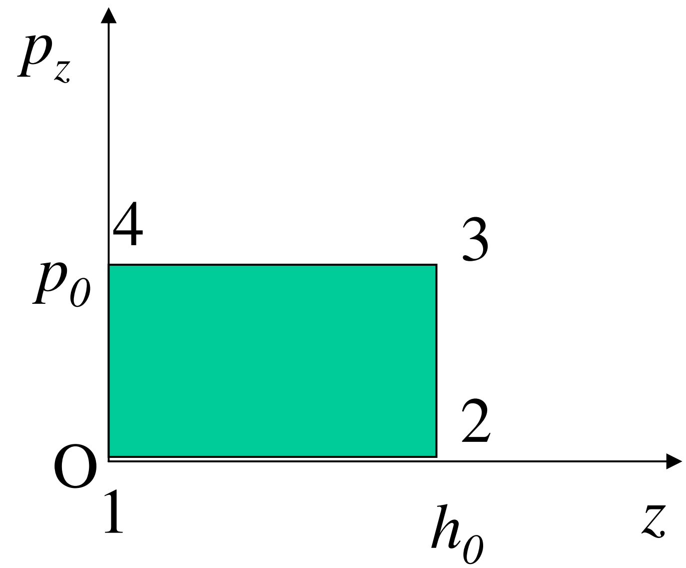
I) Przyjmujemy następujące warunki początkowe ruchu w chwili t=0

1) $z_1(t=0)=0,\ p_{1z}(t=0)=0$

2) $z_2(t=0)=h_0,\ p_{2z}(t=0)=0$

3) $z_3(t=0)=h_0,\ p_{3z}(t=0)=p_0$

4) $z_4(t=0)=0,\ p_{4z}(t=0)=p_0$



Objętość w przestrzeni fazowanej zajmowanej przez układy ograniczone przez powyższe warunki początkowe jest dla t=0 polem prostokąta o długościach boków h_0 i p_o i powierzchni $S(t=0)=p_0h_0$

II) Określamy położenie układów w przestrzeni fazowej w chwili $t_k>0$

Ad 1) $z_1(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2} \qquad p_{z1}(t=t_k)=mgt_k$

Ad 2) $z_2(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+h_0 \qquad p_{z2}(t=t_k)=mgt_k$

Ad 3) $z_3(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+\frac{p_ot_k}{m}+h_0 \qquad p_{z3}(t=t_k)=mgt_k+p_0$

Ad 4) $z_4(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+\frac{p_ot_k}{m} \qquad p_{z4}(t=t_k)=mgt_k+p_0$

$$z_1(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2} \qquad p_{z1}(t=t_k)=mgt_k \qquad z_2(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+h_0 \qquad p_{z2}(t=t_k)=mgt_k$$

$$z_3(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+\frac{p_o t_k}{m}+h_0 \qquad p_{z3}(t=t_k)=mgt_k+p_0$$

$$z_4(t=t_k)=\frac{gt_k^2}{2}+\frac{p_0 t_k}{m} \qquad p_{z4}(t=t_k)=mgt_k+p_0$$

Objętość w przestrzeni fazowanej zajmowanej przez układy ograniczone przez przyjęte warunki początkowe jest dla $t=t_k$ polem trapezu o jednakowej długości podstaw

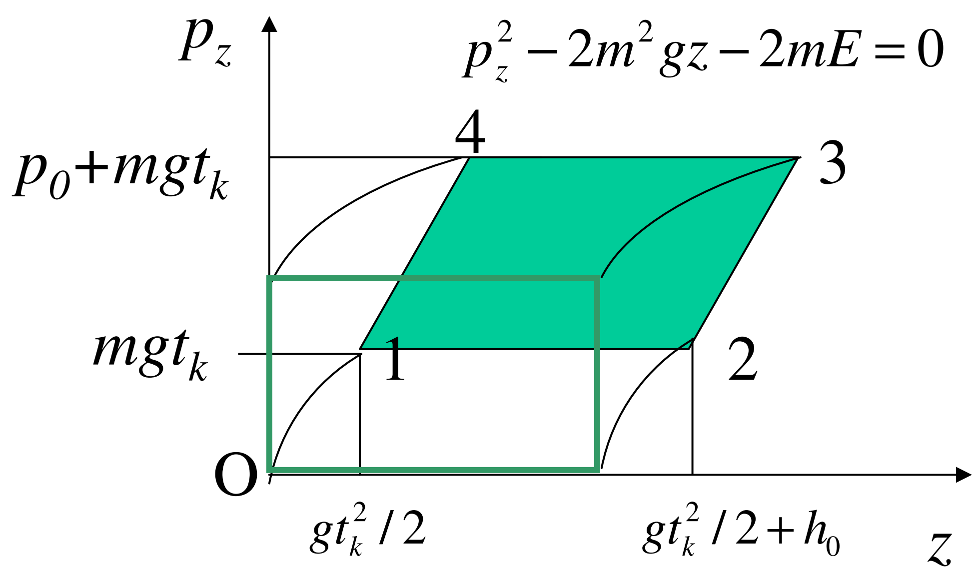
$$a=z_2(t=t_k)-z_1(t=t_k)=h_o \qquad b=z_3(t=t_k)-z_4(t=t_k)=h_o$$

oraz wysokości

$$H=p_{z4}(t=t_k)-p_{z1}(t=t_k)=$$
$$=p_{z3}(t=t_k)-p_{z2}(t=t_k)=p_o$$

i polu powierzchni

$$S(t=t_k)=\frac{a+b}{2}H=h_0 p_0=S(t=0)$$



Twierdzenie Liouville'a- dowód przy wykorzystaniu transformacji kanonicznych (dla zainteresowanych)

Rozważamy przestrzeń fazową dla układu dla którego można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony, opisanego zmiennymi kanonicznymi (*q,p*), oraz zbiór warunków początkowych w chwili *t*, zawartych wewnątrz ograniczonej objętości V w tej przestrzeni. *Ruch w przestrzeni fazowej obrazu tego układu możemy rozumieć jako przekształcenie kanoniczne prowadzące od współrzędnych (q,p) do nowych współrzędnych (Q,P). Można pokazać iż jakobian tego przekształcenia D jest równy 1, co zapewnia iż objętość złożona z punktów leżących początkowo w wybranym obszarze nie ulega zmianie w trakcie ruchu. Jakobian ten wyrażamy przez wyznacznik macierzy*

$$D=\frac{\partial(Q_1,\ldots\ldots,Q_f,P_1,\ldots\ldots,P_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f,p_1,\ldots\ldots,p_f)}=\frac{\partial(Q_1,\ldots\ldots,Q_f,P_1,\ldots\ldots,P_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f,P_1,\ldots\ldots,P_f)}\Big/\frac{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f,p_1,\ldots\ldots,p_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f,P_1,\ldots\ldots,P_f)}=$$

$$=\frac{\partial(Q_1,\ldots\ldots,Q_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f)}\Big/\frac{\partial(p_1,\ldots\ldots,p_f)}{\partial(P_1,\ldots\ldots,P_f)}$$

gdzie

$$\frac{\partial(A_1,\ldots\ldots,A_n)}{\partial(B_1,\ldots\ldots,B_n)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial A_1}{\partial B_1} & \frac{\partial A_1}{\partial B_n}\\ \frac{\partial A_n}{\partial B_1} & \frac{\partial A_n}{\partial B_n}\end{bmatrix}$$

S-funkcja tworząca

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 S(q,P)}{\partial P_i\partial q_j};\frac{\partial p_i}{\partial P_j}=\frac{\partial^2 S(q,P)}{\partial q_i\partial P_j}\Rightarrow\frac{\partial(Q_1,\ldots\ldots,Q_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f)}=\frac{\partial(p_1,\ldots\ldots,p_f)}{\partial(P_1,\ldots\ldots,P_f)}$$

Macierze, których stosunki wyznaczników liczymy określając jakobian przekształcenia są w stosunku do siebie macierzami transponowanymi czyli mają jednakowe wyznaczniki

$$D=\frac{\partial(Q_1,\ldots\ldots,Q_f)}{\partial(q_1,\ldots\ldots,q_f)}\Big/\frac{\partial(p_1,\ldots\ldots,p_f)}{\partial(P_1,\ldots\ldots,P_f)}=1\Rightarrow\boxed{V_{tot}=const}$$