Formalizm kanoniczny-cz.2

- Przekształcenia kanoniczne

Transformacje (przekształcenia) punktowe

Rozważamy dowolną transformację współrzędnych uogólnionych, zgodnych z więzami

$$Q_l = Q_l(q,t), \quad l = 1,2,\ldots,f, \quad \text{gdzie } q = (q_1, q_2, \ldots, q_f),$$

$$\left|\partial Q_k / \partial q_l\right| \neq 0 \Rightarrow \text{istnieje transf. odwrotna } q_l = q_l(Q,t)$$

Równania Lagrange'a II rodzaju są niezmiennicze względem zamiany współrzędnych uogólnionych

W starych zmiennych *(q,p,t)*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0,$$

gdzie $L = L(q,\dot{q},t)$

W nowych zmiennych *(Q,P,t)*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_l}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_l} = 0$$

gdzie $\bar{L} = \bar{L}(Q,\dot{Q},t) = L(q(Q,t),\dot{q}(Q,\dot{Q},t),t),$

$$\dot{q}_l = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}(Q,t)\dot{Q}_k + \frac{\partial q_l}{\partial t}(Q,t), \quad l = 1,2,\ldots,f$$

Transformacja punktowa współrzędnych uogólnionych określa sposób, w jaki transformują się prędkości i pędy uogólnione

$$P_l = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_l} = \sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f \quad \left(\Rightarrow p_l = \sum_{k=1}^{f} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\right)$$

Jeżeli współrzędne i pędy poddamy powyższej transformacji to również ogólna postać równań Hamiltona nie ulegnie zmianie czyli

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial \bar{H}(Q,P,t)}{\partial P_l} \qquad \dot{P}_l = -\frac{\partial \bar{H}(Q,P,t)}{\partial Q_l} \qquad \text{gdzie} \quad \bar{H} = \sum_{l=1}^{f} P_l \dot{Q}_l(Q,P,t) - \bar{L}(Q,\dot{Q}(Q,P,t),t)$$

Przekształcenia kanoniczne

Transformacje współrzędnych i pędów

$$q_l \to Q_l = Q_l(q,p,t), \qquad p_l \to P_l = P_l(q,p,t) \qquad l = 1,\ldots,f$$

nazywamy kanoniczną gdy w starych (q,p,t) i nowych (Q,P,t) zmiennych równania Hamiltona mają taką samą ogólną postać

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{q}_l = \dfrac{\partial H}{\partial p_l} \\ \dot{p}_l = -\dfrac{\partial H}{\partial q_l} \end{array}, \quad H = H(q,p,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{Q}_l = \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial P_l} \\ \dot{P}_l = -\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial Q_l} \end{array}, \quad \overline{H} = \overline{H}(Q,P,t)}$$

Do przekształceń kanonicznych zaliczmy nie tylko przekształcenia oparte na przekształceniach punktowych (praktyczny sposób sprawdzenia kanoniczności przekształcenia podany na następnym slajdzie)

W ogólnym przypadku $H(q,p,t)$ oraz $\overline{H}(Q,P,t)$ połączone są pewnym przekształceniem, którego postać znajduje się na kolejnym slajdzie. W przypadku gdy przekształcenie kanoniczne nie zależy jawnie od czasu $q_l \to Q_l = Q_l(q,p), \qquad p_l \to P_l = P_l(q,p) \qquad l = 1,\ldots,f$

to można przyjąć iż $\overline{H}(Q,P,t) = H\big(q(Q,P), p(Q,P), t\big)$

Do znalezienia funkcji $\overline{H}(Q,P,t)$ wykorzystujemy postać transformacji odwrotnej

$$Q_l \to q_l = q_l(Q,P), \qquad P_l \to p_l = p_l(Q,P) \qquad l = 1,\ldots,f$$

która istnieje gdy $\dfrac{D(Q_1,\ldots P_f)}{D(q_1,\ldots p_f)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial p_f} \\ \dfrac{\partial P_f}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_f}{\partial p_f} \end{vmatrix} \neq 0$

Warunek dostateczny kanoniczności przekształcenia (dowód na slajdach 14-21)

Istnienie dowolnej funkcji spośród poniższych funkcji tworzących przekształcenia

$F_1 = W(q, Q, t), F_2 = S(q, P, t), F_3(Q, p, t), F_4(p, P, t)$

spełniających relacje

$$p_l = \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial Q_l}, \qquad (1) \qquad p_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_l} \qquad (2)$$

$$q_l = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_l}, \quad P_l = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_l} \qquad (3) \qquad q_l = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_l}, \quad Q_l = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_l} \qquad (4)$$

Inny warunek dostateczny kanoniczności przekształcenia (dowód na slajdach 22-28)

Spełnienie poniższych warunków dla wszystkich współrzędnych i pędów po transformacji

$$\boxed{(Q_l, Q_k) = (P_l, P_k) = 0, \quad (Q_l, P_k) = \delta_{lk}} \quad Q_l = Q_l(q,p,t), P_l = P_l(q,p,t) \quad l,k = 1,2,\ldots,f$$

gdzie

$$\delta_{lk} = \begin{Bmatrix} 1 & gdy & l = k \\ 0 & gdy & l \neq k \end{Bmatrix}$$

$$(F,G) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}\right)$$ -nawias Poissona funkcji $F = F(q,p,t), G = G(q,p,t)$

Przekształcenia spełniające powyższe warunki stanowią uniwalencyjne przekształcenia kanoniczne (tylko takie będziemy rozważać)

Wyznaczenie funkcji Hamiltona po przekształceniu kanonicznym zależnym od czasu (dowód w dalszej części wykładu)

$$\overline{H}(Q,P,t) = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

przy czym we wzorze ostatecznym należy otrzymany wynik uzależnić od zmiennych *Q,P,t* wykorzystując postać transformacji kanonicznych i transformacji do nich odwrotnych

Własności przekształceń kanonicznych

Przekształcenia kanoniczne tworzą grupę przekształceń w przestrzeni fazowej, tzn.

•Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem kanonicznym

•Superpozycja dwóch przekształceń kanonicznych jest przekształceniem kanonicznym

•Transformacja odwrotna do przekształcenia kanonicznego jest przekształceniem kanonicznym (wniosek dodatkowy, pokazanie kanoniczności przekształcenia odwrotnego do danego dowodzi kanoniczności analizowanego przekształcenia)

(dowód na slajdach 27-29)

*Nawiasy Poissona są niezmiennikami uniwalencyjnych przekształceń kanonicznych

$$(F,G)=(F,G)'$$

(dowód na slajdach 22-25)

gdzie $$(F,G)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l}-\frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}\right),\quad F=F(q,p,t),\ G=G(q,p,t)$$

$$(F,G)'=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_l}\frac{\partial G}{\partial P_l}-\frac{\partial F}{\partial P_l}\frac{\partial G}{\partial Q_l}\right),\quad \begin{aligned}F&=F(Q,P,t)=F(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t)\\ G&=G(Q,P,t)=G(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t)\end{aligned}$$

Wniosek

$$\boxed{(Q_l,Q_k)=(P_l,P_k)=0,\quad (Q_l,P_k)=\delta_{lk},\quad Q_l=Q_l(q,p,t),\ P_l=P_l(q,p,t),\quad l,k=1,2,\ldots,f}$$

*Każde dwa zespoły zmiennych kanonicznych, opisujące dwa stany, które układ przyjmuje podczas swego ruchu, są powiązane przekształceniem kanonicznym (czyli ruch układu w przestrzeni fazowej można uważać za pewne przekształcenie kanoniczne) (dowód str. 28,31)

Przykłady

Przykład. Sprawdzenie kanoniczności przekształcenia kanonicznego

$$Q = q\cos(u) + p\sin(u) \qquad P = -q\sin(u) + p\cos(u)$$

Trzeba pokazać iż $(Q_i, P_j) = \delta_{ij}$ $\quad (Q_i, Q_j) = (P_i, P_j) = 0$

W przypadku gdy przestrzeń fazowa ma 2 wymiary wymaga to obliczenia 3 , a w zasadzie tylko 1 nawiasu Poissona (wynik pozostałych dwóch oczywisty na mocy definicji nawiasu Poissona)

$$(Q,P) = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$(Q,Q) = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$(P,P) = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 0$$

Przykład. Wyznaczenie funkcji tworzącej *W(q,Q)* przekształcenia kanonicznego

$$Q = q\cos(u) + p\sin(u) \Rightarrow \qquad p = \frac{Q}{\sin(u)} - q\,ctg(u)$$

$$P = -q\sin(u) + p\cos(u) \Rightarrow \quad P = -q\sin(u) + p\cos(u) = -q\sin(u) + Q\,ctg(u) - q\,ctg(u)\cos(u) =$$

$$= -q\left(\sin(u) + \frac{\cos^2(u)}{\sin(u)}\right) + Q\,ctg(u) = -\frac{q}{\sin(u)} + Q\,ctg(u)$$

$$p = \frac{\partial W(q,Q)}{\partial q} \Rightarrow W(q,Q) = \int p(q,Q)dq + C(Q)$$

$$W(q,Q) = \int\left(\frac{Q}{\sin(u)} - q\,ctg(u)\right)dq + C(Q) = \frac{Qq}{\sin(u)} - \frac{q^2}{2}ctg(u) + C(Q)$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = -\frac{q}{\sin(u)} - \frac{dC(Q)}{dQ} \qquad \frac{dC(Q)}{dQ} = -Q\,ctg(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(Q) = -\frac{1}{2}Q^2 ctg(u) + const \overset{np.}{=} -\frac{1}{2}Q^2 ctg(u) \Rightarrow W(q,Q) = \frac{Qq}{\sin(u)} - \frac{q^2}{2}ctg(u) - \frac{Q^2}{2}ctg(u)$$

Przykład Zastosowanie transformacji kanonicznej do rozwiązania równań ruchu dla oscylatora harmonicznego.

Funkcja Hamiltona $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ $\quad m,\omega=\mathrm{const}$

Funkcja tworząca $W(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 ctgQ$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \Rightarrow q^2 = \frac{2P\sin^2 Q}{m\omega} \Rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = m\omega q ctgQ = \pm\sqrt{2m\omega P}\cos Q$$

Można sprawdzić iż $(q,p)' \overset{ozn.}{=} (q,p)_{Q,P} = 1$

$$(q,p)_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\cdot\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\cdot\frac{\partial p}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\frac{2m\omega}{2\sqrt{2m\omega P}}\cos^2 Q + \frac{1}{2\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}}\frac{2}{m\omega}\sqrt{2m\omega P}\sin^2 Q = 1$$

Jest oczywiste iż

$$(q,q)' = (q,q)_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\cdot\frac{\partial q}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\cdot\frac{\partial q}{\partial Q} = 0 \qquad (p,p)' = (p,p)_{Q,P} = \frac{\partial p}{\partial Q}\cdot\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial P}\cdot\frac{\partial p}{\partial Q} = 0$$

czyli przekształcenie $Q\to q, P\to p$ jak i przekształcenie odwrotne $q\to Q, p\to P$ jest kanoniczne

(co było wiadomo gdyż była dana funkcja tworząca przekształcenia kanonicznego

$$q=\pm\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \qquad p=\pm\sqrt{2m\omega P}\cos Q \qquad H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Funkcja Hamiltona w nowych zmiennych

$$\frac{\partial W}{\partial t}=0$$

$$\overline{H}(Q,P)=H+\frac{\partial W}{\partial t}=H\left(q(Q,P),\,p(Q,P)\right)=\omega P\left(\cos^2 Q+\sin^2 Q\right)=\omega P$$

Równania Hamiltona w nowych zmiennych

$$\dot{Q}=\frac{\partial \overline{H}}{\partial P}=\omega \Rightarrow Q=\omega t+const=\omega t+Q_0$$

$$\dot{P}=-\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q}=0 \Rightarrow P=const=P_0$$

Po powrocie do starych zmiennych

$$q=\pm\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q=\pm\sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\sin\left(\omega t+Q_0\right)$$

$$p=\pm\sqrt{2m\omega P}\cos Q=\pm\sqrt{2m\omega P_0}\cos\left(\omega t+Q_0\right)$$

Rozszerzona transformacja punktowa

$$Q_l = Q_l(q,t),$$
$$P_l = \sum_{k=1}^{f} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}, \qquad l = 1,2,\dots,f$$

Transformacja odwrotna

$$q_l = q_l(Q,t),$$
$$p_l = \sum_{k=1}^{f} P_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}, \qquad l = 1,2,\dots,f$$

Rozszerzoną transformacją punktową jest w szczególności rozważana we wstępie wykładu transformacja oparta na punktowej transformacji współrzędnych uogólnionych zgodnych z więzami

Rozszerzona transformacja punktowa jest kanoniczna, z funkcją tworzącą

$$S(q,P,t) = \sum_{l=1}^{f} P_l Q_l(q,t) = \sum_{k=1}^{f} P_k Q_k(q,t)$$

gdyż zachodzą relacje : $p_l = \dfrac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} P_k \dfrac{\partial Q_k}{\partial q_l}, \qquad Q_l = \dfrac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_l} = Q_l,$

Funkcja Hamiltona po transformacji $\overline{H}(Q,P,t) = H\big(q(Q,P,t), p(Q,P,t),t\big) + \dfrac{\partial S}{\partial t}\big(q(Q,P,t),P,t\big)$

Dla rozszerzonej transformacji tożsamościowej nie można znaleźć funkcji $W(q,Q,t)$ gdyż $\left|\partial q_k / \partial P_l\right| = 0$ czyli nie można znaleźć transformacji $P_l = P_l(q,Q,t)$

Niezmiennikiem rozszerzonych transformacji punktowych jest wyrażenie:

$$\sum_{l=1}^{f} p_l \delta q_l = \sum_{l=1}^{f} p_l \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \delta Q_k \right) = \sum_{k=1}^{f} \left(\sum_{l=1}^{f} p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right) \delta Q_k = \sum_{k=1}^{f} P_k \delta Q_k = \sum_{l=1}^{f} P_l \delta Q_l$$

(uwzględniamy w dowodzie relacje $\delta q_l = \sum_{k=1}^{f} \dfrac{\partial q_l}{\partial Q_k} \delta Q_k \quad P_k = \sum_{k=1}^{f} p_l \dfrac{\partial q_l}{\partial Q_k}$)

Nie wszystkie transformacje kanoniczne są rozszerzonymi transformacjami punktowymi

Funkcja tworząca dla transformacji kanonicznej tożsamościowej

$$Q_l = q_l \qquad\qquad P_l = p_l$$

Taka transformacja należąca do rozszerzonych transformacji punktowych jest

kanoniczna, z funkcją tworzącą $S = \sum_{k=1}^{f} P_k q_k$

gdyż zachodzą relacje : $p_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_l} = P_l, \quad Q_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_l} = q_l,$

Funkcja tworząca dla transformacji kanonicznej

$$Q_l = p_l \qquad\qquad P_l = -q_l$$

Powyższa transformacja nie będąca rozszerzoną transformacją punktową jest kanoniczna, z funkcją tworzącą

$$W(q,Q) = \sum_{l=1}^{f} q_l Q_l$$

gdyż zachodzą relacje :

$$p_l = \frac{\partial W}{\partial q_l} = Q_l, \quad P_l = -\frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial Q_l} = -q_l$$

Dowody (dla zainteresowanych)

Zasada wariacyjna, prowadząca do równań Hamiltona

Równania Hamiltona równoważne są następującej zasadzie wariacyjnej

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - H(q,p,t)\right]dt = 0\\ &\delta q_l(t_0)=\delta q_l(t_1)=0,\quad l=1,2,\ldots,f\end{aligned}}$$

$\text{Uwaga}: q_l, p_l - \text{zm. niezal} \Rightarrow .$

$\delta q_l, \delta p_l - \text{dowolne}, \qquad \dot{q}_l = \frac{dq_l}{dt} \Rightarrow \delta\dot{q}_l = \frac{d\delta q_l}{dt},$

Dowód:

$$0=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - H(q,p,t)\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta\dot{q}_l + \dot{q}_l\delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l}\delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\delta p_l\right)\right]dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\frac{d\delta q_l}{dt} + \dot{q}_l\delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l}\delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\delta p_l\right)\right]dt =$$

Można zauważyć iż co do wartości

$$\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - H = L$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}(p_l\delta q_l) - \dot{p}_l\delta q_l + \dot{q}_l\delta p_l - \frac{\partial H}{\partial q_l}\delta q_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\delta p_l\right)\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(-\dot{p}_l - \frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\delta q_l + \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\delta p_l\right]dt + \sum_{l=1}^{f} p_l\delta q_l\Bigg|_{t_0}^{t_1} =$$

$\delta q_l,\ \delta p_l$ dowolne

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} -\left(\dot{p}_l + \frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\delta q_l + \left(\dot{q}_l - \frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\delta p_l\right]dt \Leftrightarrow \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \qquad l=1,\ldots,f$$

równania Hamiltona

Zasada wariacyjna, prowadząca do równań Hamiltona, musi być spełniona w starych i nowych zmiennych

$$\left.\begin{aligned}&\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - H(q,p,t)\right]dt = 0, \quad \delta q_l(t=t_0)=\delta q_l(t=t_1)=0, \quad \delta p_l(t=t_0)=\delta p_l(t=t_1)=0, \\ &\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} P_l\dot{Q}_l - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = 0, \quad \delta Q_l(t=t_0)=\delta Q_l(t=t_1)=0, \quad \delta P_l(t=t_0)=\delta P_l(t=t_1)=0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&(*)\\&(**)\end{aligned}$$

Formułując zasadę nałożyliśmy dodatkowe warunki na wariacje pędów co nie zmienia jej równoważności z równaniami Hamiltona

Przy spełnieniu równ. (*) równ. (**) będzie spełnione gdy będzie spełnione równ.(***) z dowolnie wybraną stałą c

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - H(q,p,t)\right]dt - c\,\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f} P_l\dot{Q}_l - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = 0 \quad (***)$$

$$c = 1 \Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\dot{q}_l - P_l\dot{Q}_l\right) - \left(H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right)\right]dt = 0$$

Wybór stałej c determinuje wybór nowej funkcji Hamiltona

Powyższy związek z c=1 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu funkcji $p_l(t)$, $q_l(t)$, $P_l(t)$, $Q_l(t)$, zachodzi tożsamość

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\dot{q}_l - P_l\dot{Q}_l\right) - \left(H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \Phi(Q,P,t)$$

dowolna funkcja różniczkowalna (Q,P,t)

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\Phi}$$

Warunek dostateczny, by transformacja od starych (q,p,t) do nowych (Q,P,t) zmiennych zachowywała postać równań Hamiltona definiujący uniwalencyjne transformacje kanoniczne. W dalszych rozważaniach zawężamy pojęcie transformacji kanonicznych do transformacji uniwalencyjnych. Warunek ten określa również sposób transformacji funkcji Hamiltona

Dowód: $$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\dot{q}_l - P_l\dot{Q}_l\right) - \left(H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right)\right]dt =$$

$$= \delta\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\Phi}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{d\delta\Phi}{dt}dt = \delta\Phi\Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}\delta Q_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l}\delta P_l\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\Phi = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}dQ_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l}dP_l\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt \qquad (*)$$

Przekształcając warunek kanoniczności można go zapisać w postaci w której pojawiają się tylko różniczki nowych zmiennych dQ_l, dP_l *oraz różniczka czasu*

$$dq_l = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}dQ_k + \frac{\partial q_l}{\partial P_k}dP_k\right) + \frac{\partial q_l}{\partial t}dt \Rightarrow$$

$$\sum_{l,k=1}^{f}\left[\left(p_l\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - P_l\delta_{lk}\right)dQ_k + p_l\frac{\partial q_l}{\partial P_k}dP_k\right] + \sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial q_l}{\partial t}dt - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}dQ_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l}dP_l\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt \overset{l\Leftrightarrow k}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{l,k=1}^{f}\left[\left(p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} - P_k\delta_{kl}\right)dQ_l + p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_l}dP_l\right] + \sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial q_l}{\partial t}dt - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}dQ_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l}dP_l\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt \Rightarrow$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left\{\left[\sum_{k=1}^{f}\left(p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_l}\right) - P_l\right]dQ_l + \sum_{k=1}^{f}\left(p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_l}\right)dP_l + p_l\frac{\partial q_l}{\partial t}dt\right\} - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}dQ_l + \frac{\partial\Phi}{\partial P_l}dP_l\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt$$

Porównując wyrazy stojące przy dQ_l, dP_l oraz *dt* *wnosimy* że transformacja jest kanoniczna, jeśli są spełnione związki

$$\sum_{k=1}^{f}p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_l} - P_l = \frac{\partial\Phi}{\partial Q_l}, \quad \sum_{k=1}^{f}p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_l} = \frac{\partial\Phi}{\partial P_l} \qquad p_k = p_k(Q,P,t), \quad q_k = q_k(Q,P,t) \qquad (*)$$

$$\overline{H}(Q,P,t) = \left[H(q,p,t) - \sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial q_l}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]$$

Ta reguła określa sposób transformacji funkcji Hamiltona (hamiltonianu). Jeżeli hamiltonian zostanie przekształcony w powyższy sposób, równania Hamiltona w nowych zmiennych (Q,P,t) będą miały taką samą postać jak w starych zmiennych (q,p,t). Pamiętać przy tym należy by nowy hamiltonian uzależnić od zmiennych Q,P,t korzystając z relacji (*)

Równania Hamiltona są niezmiennicze względem **przekształcenia kanonicznego** ze starych *(q,p,t)* do nowych *(Q,P,t)* zmiennych, jeżeli spełniony jest warunek

$$\boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\Phi(Q,P,t) \quad (*)}$$

Przy odpowiednich założeniach co do odwracalności transformacji różniczkę funkcji tworzącej Φ można zapisać jako funkcje tych samych zmiennych, których różniczki występują po lewej stronie równania (*) .

$$\left|\partial q_k / \partial P_l\right| \neq 0 \Rightarrow P_l = P_l(q,Q,t), \quad W(q,Q,t) \equiv \Phi(Q, P(q,Q,t), t),$$

funkcja tworząca przekształcenia kanonicznego

$$\boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = dW(q,Q,t)}$$

Ponieważ różniczki dq_l, dQ_l, dt są dowolne, więc

$$\boxed{p_l = \frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W(q,Q,t)}{\partial Q_l}, \qquad (1)}$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q,P,t), \quad p_l = p_l(Q,P,t),$$

spełniających warunki (1) równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\boxed{\overline{H}(Q,P,t) = H\left(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t\right) + \frac{\partial W}{\partial t}\left(q(Q,P,t), Q, t\right)}$$

Gdy $q_l = q_l(Q,P)$ $\quad p_l = p_l(Q,P)$

to można tak wybrać W by $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$

Warunek kanoniczności przekształcenia można zapisać przy pomocy dowolnych dwóch spośród czterech zestawów zmiennych *p, q, P, Q*, w ten sposób by różniczki tych zmiennych pojawiły się w równaniu równoważnym równaniu (*) . Wymaga to dodania do obu stron równania (*) różniczki iloczynu odpowiednich zmiennych co prowadzi do zmiany postaci funkcji tworzącej. Np. dodając różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^{f} P_l Q_l$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt + \sum_{l=1}^{f}\left(P_l dQ_l + Q_l dP_l\right) = d\left[\Phi(Q,P,t)\right] + d\left[\sum_{l=1}^{f} P_l Q_l\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l + Q_l dP_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\left[\Phi(Q,P,t) + \sum_{l=1}^{f} P_l Q_l\right]$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej $F_1(q,Q,t)=W(q,Q,t)$ wprowadzamy funkcję tworzącą $F_2(q,P,t)=S(q,P,t)$

$$\left|\partial q_k / \partial Q_l\right| \neq 0 \Rightarrow Q_l = Q_l(q,P,t) \Rightarrow S(q,P,t) = \Phi\left(Q(q,P,t),P,t\right) + \sum_{l=1}^{f} P_l Q_l(q,P,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l + Q_l dP_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = dS(q,P,t)$$

Ponieważ różniczki dq_l, dP_l, są dowolne, więc

$$\boxed{p_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_l}, \quad Q_l = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_l} \qquad (2)}$$

$$\boxed{\overline{H}(Q,P,t) = H\left(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}\left(q(Q,P,t),P,t\right)}$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q,P,t), \quad p_l = p_l(Q,P,t),$$

spełniających warunki (2) równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\Phi(Q,P,t) \quad (*)$$

Odejmując różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^{f} p_l q_l$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt - \sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l + q_l dp_l\right) = d\left[\Phi(Q,P,t)\right] - d\left[\sum_{l=1}^{f} p_l q_l\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(-q_l dp_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\left[\Phi(Q,P,t) - \sum_{l=1}^{f} p_l q_l\right]$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej *W* wprowadzamy funkcję tworzącą $F_3(p,Q,t)$

$$\begin{matrix}\left|\partial p_k / \partial P_l\right| \neq 0 \\ \left|\partial Q_k / \partial q_l\right| \neq 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} P_l = P_l(p,Q,t) \\ q_l = q_l(p,Q,t)\end{matrix}, \Rightarrow F_3(p,Q,t) = \Phi(Q,P(p,Q,t),t) - \sum_{l=1}^{f} p_l q_l(p,Q,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(-q_l dp_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = dF_3(p,Q,t)$$

Ponieważ różniczki dp_l, dQ_l, są dowolne, więc

$$\boxed{q_l = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_l}, \quad P_l = -\frac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_l} \qquad (3)}$$

$$\boxed{\overline{H}(Q,P,t) = H\left(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t\right) + \frac{\partial F_3}{\partial t}\left(p(Q,P,t), Q, t\right)}$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q,P,t), \quad p_l = p_l(Q,P,t),$$

spełniających warunki (3) równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\Phi(Q,P,t) \quad (*)$$

Dodając różniczkę wyrażenia $\sum_{l=1}^{f} P_l Q_l - \sum_{l=1}^{f} p_l q_l$

$$\sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l - P_l dQ_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt + \sum_{l=1}^{f}\left(P_l dQ_l + Q_l dP_l\right) - \sum_{l=1}^{f}\left(p_l dq_l + q_l dp_l\right) = d[\Phi(Q,P,t)] + d\left[\sum_{l=1}^{f} P_l Q_l\right] - d\left[\sum_{l=1}^{f} p_l q_l\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(-q_l dp_l + Q_l dP_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = d\left[\Phi(Q,P,t) + \sum_{l=1}^{f} P_l Q_l - \sum_{l=1}^{f} p_l q_l\right]$$

Postępując dalej podobnie jak przy wprowadzaniu funkcji tworzącej *W* wprowadzamy funkcję tworzącą $F_4(p,P,t)$

$$\begin{matrix} \left|\partial p_k / \partial Q_l\right| \neq 0 \\ \left|\partial P_k / \partial q_l\right| \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Q_l = Q_l(p,P,t) \\ q_l = q_l(p,P,t) \end{matrix} \Rightarrow F_4(p,P,t) = \Phi(Q(p,P,t),P,t) + \sum_{l=1}^{f} P_l Q_l(p,P,t) - \sum_{l=1}^{f} p_l q_l(p,P,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(-q_l dp_l + Q_l dP_l\right) - \left[H(q,p,t) - \overline{H}(Q,P,t)\right]dt = dF_4(p,P,t)$$

Ponieważ różniczki dp_l, dP_l, są dowolne, więc

$$\boxed{q_l = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_l}, \quad Q_l = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_l} \qquad (4)}$$

$$\boxed{\overline{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(p(Q,P,t),P,t)}$$

Względem transformacji

$$q_l = q_l(Q,P,t), \quad p_l = p_l(Q,P,t),$$

spełniających warunki (4) równania Hamiltona są niezmiennicze, o ile hamiltonian transformujemy w podany sposób

Znalezienie dowolnej spośród 4 funkcji tworzących $W(q,Q,t)$, $S(q,P,t)$, $F_3(Q,p,t)$, $F_4(p,P,t)$ zapewnia kanoniczność rozważanego przekształcenia.

Nie dla wszystkich przekształceń kanonicznych można znaleźć wszystkie funkcje tworzące.

Gdy przekształcenia kanoniczne nie zależą jawnie od czasu to można wybrać funkcje tworzące tak by nie zależały one od czasu i $\overline{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P), p(Q,P), t)$

Dowód tego że nawiasy Poissona są niezmiennikami przekształceń kanonicznych uniwalencyjnych:

Można pokazać na początku iż w przypadku transformacji kanonicznych uniwalencyjnych spełnione są relacje

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right) \qquad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

Dowód

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial P_k}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

gdy można znaleźć funkcje tworzącą S

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_4}{\partial P_k}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\frac{\partial F_4}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

gdy można znaleźć funkcje tworząca F_4

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial W}{\partial Q_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

gdy można znaleźć funkcje tworząca W

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

gdy można znaleźć funkcje F_3

Wykażmy następnie prawdziwość wzorów pomocniczych

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}=\frac{\partial p_l}{\partial P_k},\quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l}=-\frac{\partial q_l}{\partial P_k},\qquad (1)\qquad \frac{\partial P_k}{\partial q_l}=-\frac{\partial p_l}{\partial Q_k},\quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l}=\frac{\partial q_l}{\partial Q_k},\qquad (2)$$

wówczas gdy są spełnione relacje $\frac{\partial Q_k}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H}-H\right),\frac{\partial P_k}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H}-H\right)$ (3)

Relacje (3) określające sposób wyboru funkcji $\overline{H}(Q,P,t)$ są spełnione wówczas gdy przekształcenie kanoniczne jest uniwalencyjne

Zróżniczkujmy po czasie wzory transformacyjne Q(q,p,t) oraz P(q,p,t)

$$\dot{Q}_k=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}\dot{p}_l\right)+\frac{\partial Q_k}{\partial t},\quad \dot{P}_k=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial P_k}{\partial p_l}\dot{p}_l\right)+\frac{\partial P_k}{\partial t},$$

Z tożsamości $\overline{H}(Q,P,t)=H\left(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t\right)+\overline{H}(Q,P,t)-H(q,p,t)\Rightarrow$

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_k}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right)+\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H}-H\right),\quad \frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}\right)+\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H}-H\right)$$

Odejmujemy stronami i ponieważ w obu zestawach zmiennych obowiązują równania Hamiltona oraz są spełnione relacje(3), mamy:

$$0=\dot{Q}_k-\frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}=\sum_{l=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_l\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}+\dot{p}_l\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}-\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_k}-\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_k}\right)\right]+\frac{\partial Q_k}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H}-H\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}-\frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right)+\left(\dot{p}_l+\frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}-\frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}+\frac{\partial q_l}{\partial P_k}\right)\right]+\frac{\partial Q_k}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H}-H\right)$$

$$0=\sum_{l=1}^{f}\left[\left(\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}-\frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right)+\left(\dot{p}_l+\frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}-\frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}+\frac{\partial q_l}{\partial P_k}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial Q_k}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H}-H\right)=\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\boxed{\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}-\frac{\partial p_l}{\partial P_k}}\right)-\frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\boxed{\frac{\partial Q_k}{\partial p_l}+\frac{\partial q_l}{\partial P_k}}\right)\right]$$

Równanie powyższe będzie spełnione dla dowolnej funkcji H, gdy zaznaczone wyrazy będą równe zeru , więc otrzymujemy zestaw równań (1) gdy spełnione są relacje (3).

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}=\frac{\partial p_l}{\partial P_k},\qquad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l}=-\frac{\partial q_l}{\partial P_k},$$

Podobnie dowodzimy zestaw równań (2).

$$0=\dot{P}_k+\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}=\sum_{l=1}^{f}\left[\dot{q}_l\frac{\partial P_k}{\partial q_l}+\dot{p}_l\frac{\partial P_k}{\partial p_l}+\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}\right]+\frac{\partial P_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H}-H\right)=$$

$$\sum_{l=1}^{f}\left[\left(\dot{p}_l+\frac{\partial H}{\partial q_l}\right)\frac{\partial P_k}{\partial p_l}+\frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}+\frac{\partial P_k}{\partial q_l}\right)+\left(\dot{q}_l-\frac{\partial H}{\partial p_l}\right)\frac{\partial P_k}{\partial q_l}+\frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}-\frac{\partial P_k}{\partial p_l}\right)\right]+\frac{\partial P_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H}-H\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{f}\left[\frac{\partial H}{\partial p_l}\left(\boxed{\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}+\frac{\partial P_k}{\partial q_l}}\right)+\frac{\partial H}{\partial q_l}\left(\boxed{\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}-\frac{\partial P_k}{\partial p_l}}\right)\right]$$

Ponieważ rozważamy dowolną funkcję H, zaznaczone wyrazy muszą być równe zeru, więc otrzymujemy zestaw równań(2) : $\frac{\partial P_k}{\partial q_l}=-\frac{\partial p_l}{\partial Q_k},\quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l}=\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$ gdy spełnione są relacje (3)

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}=\frac{\partial p_l}{\partial P_k},\quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l}=-\frac{\partial q_l}{\partial P_k},\quad \frac{\partial P_k}{\partial q_l}=-\frac{\partial p_l}{\partial Q_k},\quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l}=\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$$

Na podstawie wykazanych wzorów stwierdzamy, że

$$(Q_m,P_n)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial P_n}{\partial p_l}-\frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial P_n}{\partial q_l}\right)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_n}+\frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_n}\right)=\frac{\partial Q_m}{\partial Q_n}=\delta_{m,n}$$

$$(Q_m,Q_n)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial Q_n}{\partial p_l}-\frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial Q_n}{\partial q_l}\right)=\sum_{l=1}^{f}\left(-\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial P_n}-\frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial P_n}\right)=-\frac{\partial Q_m}{\partial P_n}=0$$

$$(P_m,P_n)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial P_m}{\partial q_l}\frac{\partial P_n}{\partial p_l}-\frac{\partial P_m}{\partial p_l}\frac{\partial P_n}{\partial q_l}\right)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial P_m}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial Q_n}+\frac{\partial P_m}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial Q_n}\right)=\frac{\partial P_m}{\partial Q_n}=0$$

Stąd

$$(F,G)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l}-\frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}\right)=\sum_{l=1}^{f}\left[\sum_{m=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}+\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial q_l}\right)\sum_{n=1}^{f}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial p_l}+\frac{\partial G}{\partial P_n}\frac{\partial P_n}{\partial p_l}\right)+\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial Q_m}{\partial p_l}+\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial P_m}{\partial p_l}\right)\sum_{n=1}^{f}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial q_l}+\frac{\partial G}{\partial P_n}\frac{\partial P_n}{\partial q_l}\right)\right]=$$

$$\sum_{m,n=1}^{f}\left[\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial P_n}(Q_m,P_n)+\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial Q_n}(P_m,Q_n)+\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial Q_n}(Q_m,Q_n)+\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial P_n}(P_m,P_n)\right]=$$

$$\sum_{m,n=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial P_n}\delta_{mn}-\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial Q_n}\delta_{nm}\right)=\sum_{m=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_m}\frac{\partial G}{\partial P_m}-\frac{\partial F}{\partial P_m}\frac{\partial G}{\partial Q_m}\right)=(F,G)'$$

Dowód tego iż warunkiem dostatecznym kanoniczności przekształcenia $Q_l = Q_l(q,p,t) \quad P_l = P_l(q,p,t)$ jest jednoczesne zachodzenie poniższych warunków sformułowanych przy pomocy nawiasów Poissona

$$(Q_m, P_n) = \sum_{l=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) = \delta_{m,n}$$

$$(Q_m, Q_n) = \sum_{l=1}^{f} \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_l}\frac{\partial Q_n}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_m}{\partial p_l}\frac{\partial Q_n}{\partial q_l} \right) = 0$$

$$(P_m, P_n) = \sum_{l=1}^{f} \left(\frac{\partial P_m}{\partial q_l}\frac{\partial P_n}{\partial p_l} - \frac{\partial P_m}{\partial p_l}\frac{\partial P_n}{\partial q_l} \right) = 0$$

Z wcześniejszych rozważań wynika iż powyższe warunki mogą być spełnione tylko wówczas gdy $\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial p_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial p_l} = -\frac{\partial q_l}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial p_l}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$

Spełnienie powyższych warunków oraz warunków $\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right) \quad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right)$ określających wyłącznie sposób wyboru funkcji Hamiltona w nowych zmiennych zapewnia to iż wówczas gdy $\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$ to również $\dot{Q}_l = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_l} \quad \dot{P}_l = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_l}$ czyli rozważane przekształcenie jest kanoniczne, przy czym jest to przekształcenie uniwalencyjne. Gdy przekształcenie nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial P_k}{\partial t} = 0$ to można przyjąć w szczególności iż $\overline{H} = H$

O tym że równania Hamiltona są spełnione przy podanych warunkach sformułowanych przy wykorzystaniu nawiasów Poissona w nowych zmiennych świadczyć w szczególności może też poniższe rozumowanie wykorzystujące m.in. dodatkowo niezmienniczość nawiasów Poissona względem przekształceń kanonicznych uniwalencyjnych oraz spełnienie relacji

$$\frac{\partial Q_k}{\partial Q_l} = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = \delta_{kl} \qquad \frac{\partial Q_k}{\partial P_l} = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = 0 \qquad \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right) \qquad \frac{\partial P_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right)$$

Ostatnie dwa warunki określają sposób wyboru funkcji Hamiltona w nowych zmiennych

Mianowicie

$$\dot{Q}_k = \left(Q_k, H\right) + \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \left(Q_k, H\right)' + \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right) = \frac{\partial H}{\partial P_k} + \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\overline{H} - H\right) = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}$$

gdzie

$$\left(Q_k, H\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right) = \left(Q_k, H\right)' = \sum_{l=1}^{f}\left(\overset{\delta_{kl}}{\frac{\partial Q_k}{\partial Q_l}}\frac{\partial H}{\partial P_l} - \overset{0}{\frac{\partial Q_k}{\partial P_l}}\frac{\partial H}{\partial Q_l}\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\delta_{kl}\frac{\partial H}{\partial P_l}\right) = \frac{\partial H}{\partial P_k}$$

zaś

$$\dot{P}_k = \left(P_k, H\right) + \frac{\partial P_k}{\partial t} = \left(P_k, H\right)' - \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right) = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} - \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\overline{H} - H\right) = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}$$

gdzie

$$\left(P_k, H\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial P_k}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right) = \left(P_k, H\right)' = \sum_{l=1}^{f}\left(\overset{0}{\frac{\partial P_k}{\partial Q_l}}\frac{\partial H}{\partial P_l} - \overset{\delta_{kl}}{\frac{\partial P_k}{\partial P_l}}\frac{\partial H}{\partial Q_l}\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(-\delta_{kl}\frac{\partial H}{\partial Q_l}\right) = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}$$

Inna postać warunku na kanoniczność transformacji

Dzięki temu iż $p_l = \frac{\partial W}{\partial q_l}, \quad P_l = -\frac{\partial W}{\partial Q_l}$ to

wariacja (bez czasu) funkcji tworzącej przekształcenia W jest równa

$$\delta W(q,Q,t) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial W}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial W}{\partial Q_l}\delta Q_l\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta q_l - P_l\delta Q_l\right)$$

Z drugiej strony

$$\delta\Phi(Q,P,t) = \delta\Phi(Q,P(q,Q,t),t) = \delta W(q,Q,t)$$

$$\boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta q_l - P_l\delta Q_l\right) = \delta\Phi(Q,P,t)}$$

Dla rozszerzonej transformacji punktowej $\Phi(Q,P,t) = 0$ gdyż

$$\sum_{l=1}^{f} p_l\delta q_l = \sum_{l=1}^{f} p_l\left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}\delta Q_k\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(\sum_{l=1}^{f} p_l\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}\right)\delta Q_k = \sum_{k=1}^{f} P_k\delta Q_k = \sum_{l=1}^{f} P_l\delta Q_l$$

Dowód tego iż przekształcenia kanoniczne tworzą grupę przekształceń w przestrzeni fazowej, tzn.

•Przekształcenie tożsamościowe jest przekształceniem kanonicznym

$$Q_l = q_l, P_l = p_l \Rightarrow \delta Q_l = \delta q_l \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta q_l - P_l\delta Q_l\right) = 0, \Phi = 0$$

•Superpozycja dwóch przekształceń kanonicznych jest przekształceniem kanonicznym

• $Q = Q(q,p,t), P = P(q,p,t) \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta q_l - P_l\delta Q_l\right) = \delta\Phi_1(Q,P,t)$ (*)

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}(Q,P,t), \tilde{P} = \tilde{P}(Q,P,t) \Rightarrow \sum_{l=1}^{f}\left(P_l\delta Q_l - \tilde{P}_l\delta\tilde{Q}_l\right) = \delta\Phi_2(\tilde{Q},\tilde{P},t) \quad (**)$$

Dodając równania (*) i (**) stronami

$$\sum_{l=1}^{f}\left(P_l\delta Q_l - \tilde{P}_l\delta\tilde{Q}_l + p_l\delta q_l - P_l\delta Q_l\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta q_l - \tilde{P}_l\delta\tilde{Q}_l\right) = \delta\left(\Phi = \Phi_1 + \Phi_2\right) \Rightarrow$$

$\tilde{Q} = \tilde{Q}(q,p), \tilde{P} = \tilde{P}(q,p)$

Transformacja kanoniczna o funkcji tworzącej będącej sumą funkcji tworzących

•Transformacja odwrotna do przekształcenia kanonicznego jest przekształceniem kanonicznym

$$Q = Q(q, p, t), P = P(q, p, t)_l \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \left(p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l \right) = \delta \Phi_1 (Q, P, t)$$

$$q = q(Q, P, t), p = p(Q, P, t) \Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \left(P_l \delta Q_l - p_l \delta q_l \right) = -\sum_{l=1}^{f} \left(p_l \delta q_l - P_l \delta Q_l \right) =$$

$$= -\delta \Phi_1 (q, p, t) = \delta \left(-\Phi_1 (q, p, t) \right)$$

Funkcja tworząca transformacji odwrotnej do danej różni się od funkcji tworzącej danej transformacji znakiem

Dowód tego że ruch układu w przestrzeni fazowej można uważać za pewne przekształcenie kanoniczne

Zmiany współrzędnych i pędów w trakcie ruchu to transformacja kanoniczna dana wzorem $q_l(t) = q_l(q_0, p_0, t)$ $\quad p_l(t) = p_l(q_0, p_0, t)$

gdzie $q_{lo} = q_l(t=0)$ $\quad p_{lo} = p_l(t=0)$

Dowód: W czasie ruchu zachodzi relacja dla wariacji bez czasu funkcji Lagrange'a

$$\delta L = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\delta \dot{q}_l\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(\dot{p}_l \delta q_l + p_l \delta \dot{q}_l\right) = \frac{d}{dt}\sum_{l=1}^{f} p_l \delta q_l$$

Po scałkowaniu powyższego równania stronami po czasie od t=0 do t=t otrzymujemy iż

$$\delta W_H\left(q_0, p_0, t\right) = \sum_{l=1}^{f}\left(p_l \delta q_l - p_{l0}\delta q_{l0}\right)$$

gdzie $W_H\left(q_0, p_0, t\right) = \int_0^t L(q(q_0, p_0, t'), \dot{q}(q_0, p_0, t'), t')dt'$ $\quad \dot{q} = \frac{dq}{dt'}$

jest działaniem Hamiltona

Działanie to można powiązać z funkcją tworzącą przekształcenia kanonicznego

$$W\left(q, q_0, t\right) = -W_H(q_0, p_0(q_0, q, t), t)$$

gdyż zachodzi związek $\sum_{l=1}^{f}\left(p_{l0}\delta q_{l0} - p_l \delta q_l\right) = \delta W(q, q_0, t)$

Znalezienie takiej funkcji potwierdza ze mamy do czynienia z transformacją kanoniczną