Formalizm kanoniczny-cz.1

- Funkcja Hamiltona i równania Hamiltona, przestrzeń fazowa, całki ruchu w formalizmie kanonicznym, nawiasy Poissona
- Przykłady wykorzystania formalizmu kanonicznego do opisu układów dla których można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony

Wyprowadzenie równań Hamiltona

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}-\frac{\partial L}{\partial q_l}=0,\quad L=L(q,\dot{q},t),\quad l=1,2,\ldots,f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v_l}-\dfrac{\partial L}{\partial q_l}=0 \\ \dot{q}_l=v_l \end{cases},L=L(q,v,t),\quad l=1,2,\ldots,f$$

Równ. Lagrange'a II rodzaju: układ f równań różniczkowych zwyczajnych 2. rzędu na zmienne q_l, l=1,2,...,f

Układ 2f równań różniczkowych zwyczajnych 1. rzędu na zmienne q_l, v_l , l=1,2,...,f

Dokonamy zamiany zmiennych (q,v) na zmienne (q,p) w powyższym układzie równań wykorzystując tak zwaną transformacje Legandre'a. W tym celu na początku posługując się definicją pędów uogólnionych, przepisujemy równania te w postaci

$$p_l=\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_l}=\frac{\partial L(q,v,t)}{\partial v_l}\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_l=\dfrac{\partial L}{\partial q_l} \\ \dot{q}_l=v_l \end{cases},\quad l=1,2,\ldots,f$$

Obliczmy wariacje następujących funkcji:

$$\delta L=\delta L(q,v,t)=\sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_l}\delta q_l+\frac{\partial L}{\partial v_l}\delta v_l\right)=\sum_{l=1}^{f}\left(\dot{p}_l\delta q_l+p_l\delta v_l\right)$$

$$\delta\sum_{l=1}^{f}p_l v_l=\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta v_l+v_l\delta p_l\right)=\sum_{l=1}^{f}\left(p_l\delta v_l+\dot{q}_l\delta p_l\right)$$

Odejmując stronami, dostaniemy

$$\delta\left(\sum_{l=1}^{f}p_l v_l-L\right)=\boxed{\sum_{l=1}^{f}\left(\dot{q}_l\delta p_l-\dot{p}_l\delta q_l\right)}$$

Wariacja funkcji po lewej stronie, wyrażonej w zmiennych q_l, p_l , traktowanych jako niezależne

Zdefiniujmy **funkcję Hamiltona (Hamiltonian)**

$$\begin{cases} \boxed{H = H(q,p,t) \equiv \sum_{l=1}^{f} p_l v_l(q,p,t) - L(q, v(q,p,t), t)} \\ \text{gdzie } p_l = \dfrac{\partial L(q,v,t)}{\partial v_l} \end{cases}$$

Funkcja Hamiltona zależy od współrzędnych i pędów uogólnionych związanych z tymi współrzędnymi i czasu. Nie może zależeć od prędkości uogólnionych, od których zależy funkcja G (uogólniona energia) równa co do wartości funkcji Hamiltona

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l(q_l, v_l, t) v_l - L(q,v,t)$$

$$\delta H = \sum_{l=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial H}{\partial p_l} \delta p_l \right) = \sum_{l=1}^{f} \left(\dot{q}_l \delta p_l - \dot{p}_l \delta q_l \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_l} + \dot{p}_l \right) \delta q_l + \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} - \dot{q}_l \right) \delta p_l \right] = 0$$

dowolne

Równania kanoniczne Hamiltona

$$\Rightarrow \boxed{\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f}$$

Układ $2f$ równań różniczkowych zwyczajnych 1. rzędu na **zmienne kanonicznie sprzężone** q_l, p_l , l=1,2,...,f

Stan układu punktów materialnych o f stopniach swobody można reprezentować jako punkt w $2f$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej** o współrzędnych $(q_1, q_2, \ldots, q_f, p_1, p_2, \ldots, p_f)$

Współrzędne te traktujemy a priori jako zmienne niezależne od siebie , a wszystkie relacje między nimi są określone poprzez równania Hamiltona.

Przestrzeń fazowa

Stan układu punktów materialnych o f stopniach swobody można reprezentować jako punkt w $2f$ -wymiarowej **przestrzeni fazowej** o współrzędnych $\left(q_1, q_2, \ldots, q_f, p_1, p_2, \ldots, p_f\right)$

Układ w trakcie ruchu przemieszcza po pewnej trajektorii łączącej punkty w przestrzeni fazowej.

Gdy funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu to przez dowolny punkt w przestrzeni fazowej przechodzi tylko jedna trajektoria ruchu, czyli trajektorie te się nie przecinają. Wynika to z faktu iż znajomość położeń i pędów wszystkich punktów materialnych układu oraz funkcji Hamiltona w pełni determinuje jego późniejszy ruch.

Gdy funkcja Hamiltona zależy jawnie od czasu to przez dany punkt w przestrzeni fazowej ***w ustalonej chwili czasu*** przechodzi także tylko jedna trajektoria, a zatem trajektorie te **w ustalonej chwili czasu** się nie przecinają

Powyższe stwierdzenia nie są słuszne w przypadku przestrzeni konfiguracyjnej.

Inny sposób wyprowadzenia równań Hamiltona z równań Lagrange'a II rodzaju

$$H(q,p,t)=\sum_{k=1}^{f} p_k v_k(q,p,t)-L(q,v(q,p,t),t)$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_l}}=\sum_{k=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_l}-\frac{\partial L}{\partial q_l}-\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial q_l}=\sum_{k=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_l}-\frac{\partial L}{\partial q_l}-\sum_{k=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_l}=-\frac{\partial L}{\partial q_l}=\boxed{-\dot{p}_l}$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_l}}=v_l+\sum_{k=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial p_l}-\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial p_l}=v_l+\sum_{l=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_l}-\sum_{k=1}^{f} p_k\frac{\partial v_k}{\partial q_l}=v_l=\boxed{\dot{q}_l}$$

Wniosek dod. $\frac{\partial H}{\partial q_l}=-\frac{\partial L}{\partial q_l}\Rightarrow Gdy\,\frac{\partial L}{\partial q_l}=0\quad to\,\frac{\partial H}{\partial q_l}=0$

Jeżeli dana współrzędna nie występuje w funkcji Lagrange'a to i nie występuje w funkcji Hamiltona

Funkcja Hamiltona dla układów na które działają siły potencjalne w przypadku więzów skleronomicznych

Jeżeli:

- Związki między współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędnymi uogólnionymi nie zależą jawnie od czasu *x=x(q)* (czyli więzy muszą być skleronomiczne),
- Siły działające na układ mają potencjał *V*(*q,t*)

to funkcja Hamiltona równa liczbowo funkcji $G(q,\dot{q},t)=\sum_{l=1}^{f} p_l(q,\dot{q},t)\dot{q}_l-L(q,\dot{q},t)$

jest równa sumie energii kinetycznej i potencjału dla układu

$$\boxed{H=T+V=T(q,p)+V(q,t)}$$

Wyprowadzenie równań Lagrange'a II rodzaju z równań Hamiltona H(q,p,t)

Transformacja p→v zgodnie z którą $v_l = v_l(q,p,t)$, jest transformacją odwrotną do transformacji v→p zgodnie z którą $p_l = p_l(q,v,t)$ o ile są spełnione relacje

$$p_l = \frac{\partial L(q,v,t)}{\partial v_l} \qquad v_l = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_l}, \qquad l = 1,2,\ldots,f$$

Można ją potraktować jako odwrotną transformację Legandre'a

Analogicznie można wprowadzić funkcje Lagrange'a w oparciu o znajomość funkcji Hamiltona

$$L(q,v,t) = \sum_{l=1}^{f} v_l p_l(q,v,t) - H(q,p(q,v,t),t), \quad \text{gdzie} \quad v_l = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_l}, \qquad l = 1,2,\ldots,f$$

Można pokazać, że prowadzi ona od równań Hamiltona do równań Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial q_l} = \boxed{-\frac{\partial H}{\partial q_l} = \dot{p}_l}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_l} = p_l + \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} - \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial v_l} = p_l + \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} - \sum_{k=1}^{f} v_k \frac{\partial p_k}{\partial v_l} = p_l$$

równania Hamiltona

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_l}\right)} = \frac{\partial L}{\partial q_l}$$

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} = v_l$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$$

równania Lagrange'a

Pochodna zupełna po czasie funkcji Hamiltona H(q,p,t)

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial q_l}\dot{q}_l+\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial p_l}\dot{p}_l=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l}-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H(q,p,t)=\sum_{l=1}^{f}p_l v_l(q,p,t)-L(q,v(q,p,t),t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial v_l}{\partial t}-\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial v_l}\frac{\partial v_l}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial v_l}{\partial t}-\sum_{l=1}^{f}p_l\frac{\partial v_l}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

Gdy funkcja Lagrange'a nie zależy jawnie od czasu to i funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu

Całki pierwsze równań Hamiltona

1) $$\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0\Rightarrow H=const$$

Jeżeli funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu to jest stałą ruchu

Przy spełnieniu warunków przy których funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii (zapewniających to iż $H=T+V$ oraz T nie zależy jawnie od czasu) energia całkowita jest stałą ruchu gdy energia potencjalna nie zależy jawnie od czasu

2) $$\dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r}=0\quad\Rightarrow\quad p_r=\text{const}\qquad\qquad \dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}=0\quad\Rightarrow\quad q_s=\text{const}$$

Jeżeli w funkcji Hamiltona nie występuje współrzędna q_r (czyli ta współrzędna uogólniona jest cykliczna) lub p_s, to odpowiednie zmienne kanonicznie sprzężone są całkami ruchu

Przykład. Cząstka poruszająca się w obecności sił potencjalnych na ruch której nie nałożono więzów przy przyjęciu za współrzędne uogólnione współrzędnych kartezjańskich

Współrzędne uogólnione $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z \Rightarrow x = q_1, y = q_2, z = q_3$ (*)

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z, t)$

Pędy uogólnione $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$ (*l*=*1*,…,*f*) $\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ $\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ $\quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$

Uogólniona energia

$$G = G(q_1.....,q_f, \dot{q}_1,........., \dot{q}_f, t) = \sum_{l=1}^{f} p_l\left(q_1,........., q_f, \dot{q}_1,........., \dot{q}_f, t\right)\dot{q}_l - L(q_1.....,q_f, \dot{q}_1,........., \dot{q}_f, t) \Rightarrow$$

$$G\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.t\right) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x, y, z, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x, y, z, t)$$

$G = T + V$ (bo w relacjach (*) nie występuje czas)

Funkcja Hamiltona

$$H = H(q_1.....,q_f, p_1,........., p_f, t) = G(q_1.....,q_f, \dot{q}_1\left(q_1,............., q_f, p_1,..........., p_f, t\right),........., \dot{q}_f\left(q_{1,.........}, q_f, p_1,..........., p_f, t\right), t)$$

$$p_x = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad p_y = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \qquad p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H\left(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t\right) = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right] + V(x, y, z, t) = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + V(x, y, z, t)$$

$$H\left(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t\right) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z, t)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \qquad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \qquad (l=1,\ldots,f=3)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$$

Relacje identyczne z tymi definiującymi pędy uogólnione poprzez pochodne z funkcji Lagrange'a po współrzędnych uogólnionych

Nie zawsze pochodne po czasie pędów uogólnionych są równe odpowiednim składowym siły wypadkowej jak to ma miejsce w tym prostym przykładzie

Funkcja Hamiltona jest stalą ruchu gdy potencjał nie zależy jawnie od czasu czyli $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ gdyż

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Funkcja Hamiltona dla cząstki o ładunku *e* w polu elektromagnetycznym przy więzach niezależnych od czasu

Dla cząstki o ładunku e poruszającej się z prędkością $\vec{v}$ w polu elektromagnetycznym o potencjale skalarnym φ i potencjale wektorowym $\vec{A}$ mamy potencjał uogólniony U: $U = e\varphi(\vec{r},t) - e\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}$, funkcja Lagrange'a $L = T - U$

wektor pędu uogólnionego: $\vec{p}_u = m\vec{v} + e\vec{A}$ We współ. kart. $\vec{p}_u = (p_{u1}, p_{u2}, p_{u3}) = (p_{ux}, p_{uy}, p_{uz})$

Przy wyborze współrzędnych uogólnionych tak iż $x_j = x_j(q) \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{x}_j = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l$

$$\sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l = \sum_{l=1}^{f}\sum_{j=1}^{3} p_{uj}\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\dot{q}_l = \sum_{j=1}^{3} p_{uj}\dot{x}_j = \vec{p}_u\cdot\vec{v}, \quad f \le 3 \qquad p_l = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_l} \qquad p_{uj} = \frac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}_j}$$

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l\dot{q}_l - L = \vec{p}_u\cdot\vec{v} - (T-U) = (m\vec{v} + e\vec{A})\cdot\vec{v} - T + e\varphi - e\vec{A}\cdot\vec{v} =$$

$$= m\vec{v}\cdot\vec{v} - T + e\varphi = 2T - T + e\varphi = T + e\varphi$$

$$\vec{p}_u = m\cdot\vec{v} + e\vec{A} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p}_u - e\vec{A}) \Rightarrow T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2m}(\vec{p}_u - e\vec{A})^2$$

Funkcja Hamiltona
$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\vec{p}_u - e\vec{A})^2 + e\varphi}$$

przy czym $p_{uj} = p_{uj}(p_{1,\dots,}p_f, q_{1,\dots\dots,}q_f, t)$ $\quad A_j = A_j(q_{1,\dots\dots,}q_f, t)$ $\quad \varphi = \varphi(q_{1,\dots\dots,}q_f, t)$

Gdy współrzędnymi uogólnionymi są współrzędne kartezjańskie
$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2\right] + e\varphi$$

$$p_x = p_{ux} \qquad p_y = p_{uy} \qquad p_z = p_{uz} \qquad \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x - eA_x}{m} \qquad \dot{y} = \frac{p_y - eA_y}{m} \qquad \dot{z} = \frac{p_z - eA_z}{m}$$

Nawias Poissona

funkcji

$$F = F(q,p,t) \quad G = G(q,p,t)$$

$$\boxed{(F,G) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}\right)}$$

$$F = F(q,p,t) \qquad G = G(q,p,t) \qquad F_1 = F_1(q,p,t) \qquad F_2 = F_2(q,p,t)$$

Własności nawiasów Poissona

C-stała niezależna od współrzędnych i pędów

$$(F,G) = -(G,F), \quad (F,F) = 0, \qquad (F_1 + F_2, G) = (F_1,G) + (F_2,G), \qquad (F,C) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(F,G) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, G\right) + \left(F, \frac{\partial G}{\partial t}\right) \qquad (F_1F_2, G) = F_1(F_2,G) + (F_1,G)F_2, \qquad (CF,G) = C(F,G)$$

$$(F,q_l) = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial q_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial q_l}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(-\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta_{lk}\right) = -\frac{\partial F}{\partial p_l}$$

$$(F,p_l) = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial p_l}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_l}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\delta_{lk}\right) = \frac{\partial F}{\partial q_l}$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial p_k} = \frac{\partial p_l}{\partial q_k} = 0$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial q_k} = \frac{\partial p_l}{\partial p_k} = \delta_{lk}$$

tożsamość Poissona $\longrightarrow$

$$\boxed{(F_1,(F_2,F_3)) + (F_2,(F_3,F_1)) + (F_3,(F_1,F_2)) = 0}$$

Ważne relacje dla nawiasów Poissona współrzędnych i pędów uogólnionych

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & gdy \quad k = l \\ 0 & gdy \quad k \neq l \end{cases}$$

$$(F,q_l) = -\frac{\partial F}{\partial p_l}, \quad (F,p_l) = \frac{\partial F}{\partial q_l} \Rightarrow \boxed{(q_k,q_l) = (p_k,p_l) = 0, (q_k,p_l) = \delta_{kl}}$$

Dla dowolnej funkcji $F = F(q, p, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l}\dot{p}_l\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial H}{\partial q_l}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$(F,G) = \sum_{l=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial G}{\partial q_l}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dt} = (F,H) + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

Gdy funkcja F nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ oraz $(F,H) = 0$
to funkcja F jest całką (stałą) ruchu

$$F = q_l \Rightarrow \frac{dq_l}{dt} = (q_l, H) + \boxed{\frac{\partial q_l}{\partial t}} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial q_l}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_l}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(\delta_{lk}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_l}$$

$$0$$

$$F = p_l \Rightarrow \frac{dp_l}{dt} = (p_l, H) + \boxed{\frac{\partial p_l}{\partial t}} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial p_l}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_l}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{f}\left(-\delta_{lk}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_l}$$

Jak widać równania Hamiltona można zapisać przy pomocy nawiasów Poissona

$$\boxed{\dot{q}_l = (q_l, H) \qquad \dot{p}_l = (p_l, H)}$$

Ponadto $$F = H \Rightarrow \frac{dH}{dt} = (H,H) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Przykład. Można pokazać iż w przypadku gdy funkcja Hamiltona jest skalarną funkcją położenia i pędu cząstki (na którą nie nałożono więzów) czyli zachodzi

$$H = H\left(r^2, p^2, \vec{r}\cdot\vec{p}\right) = H\left(x^2+y^2+z^2, p_x^2+p_y^2+p_z^2, xp_x+yp_y+zp_z\right)$$

to wszystkie składowe momentu pędu są stałymi ruchu (całkami pierwszymi ruchu)

Dowód dla składowej z-towej (x, y, z, p_x, p_y, p_z –współrzędne uogólnione i związane z nimi pędy)

$$\left(L_z, H\right) = \frac{\partial L_z}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial L_z}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} + \frac{\partial L_z}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial L_z}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial L_z}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial L_z}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z} \qquad L_z = xp_y - yp_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial r^2}2x + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial H}{\partial p^2}\frac{\partial p^2}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_x} = \frac{\partial H}{\partial p^2}2p_x + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}x$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial r^2}\frac{\partial r^2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial r^2}2y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_y$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial H}{\partial p^2}\frac{\partial p^2}{\partial p_y} + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}{\partial p_y} = \frac{\partial H}{\partial p^2}2p_y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}y$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial x} = p_y \qquad \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial y} = -p_x \qquad \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = x$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial z} = \frac{\partial L_z}{\partial p_z} = 0 \qquad \frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

$$\left(L_z, H\right) = \frac{\partial H}{\partial p^2}2p_xp_y + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}xp_y - \frac{\partial H}{\partial p^2}2p_yp_x - \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}yp_x +$$

$$+\frac{\partial H}{\partial r^2}2xy + \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_xy - \frac{\partial H}{\partial r^2}2yx - \frac{\partial H}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{p})}p_yx = 0$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(L_z, H\right) + \frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$$

$$L_z = const$$

Twierdzenie Poissona - Jacobiego
Jeżeli $F_1\ (q,p,t)$ oraz $F_2\ (q,p,t)$ są całkami pierwszymi równań kanonicznych Hamiltona, to (F_1,F_2) jest także całką pierwszą równań Hamiltona.

Przykład zastosowania twierdzenia Poissona-Jacobiego

Można pokazać iż $\left(L_x, L_y\right) = L_z$

A zatem jeżeli L_x oraz L_y są całkami ruchu to i L_z jest całką ruchu

Dowód tego iż $\left(L_x, L_y\right) = L_z$

$$L_x = yp_z - zp_y \qquad L_y = zp_x - xp_z$$

$$\left(L_x, L_y\right) = \frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} + \frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} + \frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z} =$$

$$= 0 + 0 + xp_y - 0 - 0 - yp_x = L_z$$

Dowód Twierdzenia Poissona-Jacobiego

$$\frac{dF_1}{dt} = (F_1, H) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \longrightarrow \frac{d(F_1, F_2)}{dt} = ((F_1, F_2), H) + \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t}$$

$$(F_1, (F_2, F_3)) + (F_2, (F_3, F_1)) + (F_3, (F_1, F_2)) = 0$$

$$F_3 = H \longrightarrow (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + (H, (F_1, F_2)) = 0$$

$$((F_1, F_2), H) = -(H, (F_1, F_2)) = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = (F_1, (F_2, H)) - (F_2, (F_1, H))$$

F_1, F_2 - stałe ruchu $\longrightarrow \frac{dF_1}{dt} = \frac{dF_2}{dt} = 0$

$$((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) - (F_2, (F_1, H))$$

$$\frac{dF_1}{dt} = (F_1, H) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \longrightarrow (F_1, H) = -\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\frac{dF_2}{dt} = (F_2, H) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \longrightarrow (F_2, H) = -\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$((F_1, F_2), H) = -\left(F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) + \left(F_2, \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) =$$

$$= -\left(F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\right) = -\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t}$$

$$\frac{d(F_1, F_2)}{dt} = ((F_1, F_2), H) + \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t} = -\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t} + \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial t} = 0$$

(F_1, F_2) stałą ruchu

Niektóre zalety formalizmu opartego na równaniach Hamiltona

Wprowadzając wektory 2f wymiarowe

$$z = \begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_f \\ p_1 \\ \\ p_f \end{bmatrix} \qquad h(q_1,\ldots,q_f,p_1,\ldots\ldots,p_f,t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_f} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_f} \end{bmatrix}$$

równania Hamiltona

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad l = 1,2,\ldots,f$$

można zapisać w zwartej postaci $\qquad \dot{z} = h(z,t)$

Inne zalety formalizmu opartego na równaniach Hamiltona wynikają z

1) łatwiejszej analizy układów, dla których występują współrzędne cykliczne
2) możliwości elastycznego wyboru współrzędnych i pędów traktowanych jako zmienne niezależne (transformacje kanoniczne)
3) ciekawych własności trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej użytecznych m.in. przy badaniu układów chaotycznych oraz własności statystycznych układów złożonych z wielu jednakowych obiektów
4) możliwości łatwiejszego sformułowania metody znajdywania rozwiązań przybliżonych równań ruchu
5) tego iż funkcja Hamiltona po dokonaniu zamiany współrzędnych i pędów na operatory tych wielkości i dokonanie jej zamiany w ten sposób na operator Hamiltona stanowi podstawę przy formułowaniu opisu układów w ramach mechaniki kwantowej

Przykłady wykorzystania formalizmu kanonicznego do opisu układów dla których można wprowadzić potencjał lub potencjał uogólniony

Przykład. Cząstka o masie m poruszająca się po powierzchni kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R w polu siły ciężkości (wahadło sferyczne) **(częściowo do samodzielnej analizy)**

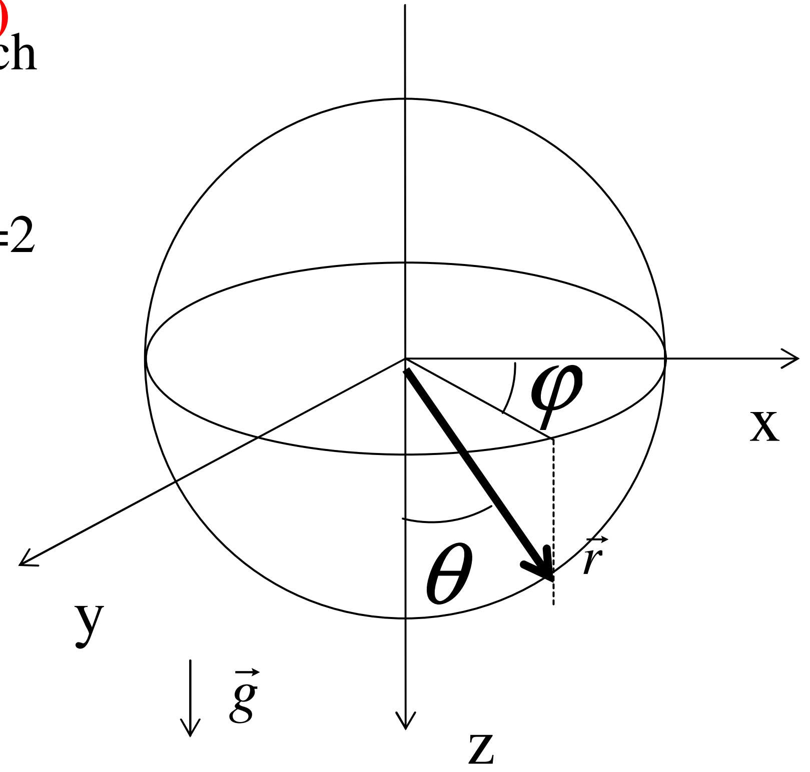
Równanie więzów we współrzędnych kartezjańskich

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Ruch po powierzchni →liczba stopni swobody f=2

Za współrzędne uogólnione można przyjąć 2 z 3 współrzędnych w sferycznym układzie współrzędnych a mianowicie kąt biegunowy θ i azymutalny φ.

Związek współrzędnych w układzie kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi



$$x = R\sin\theta\cos\varphi \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Można łatwo pokazać iż równanie więzów jest spełnione tożsamościowo dla dowolnych wartości współrzędnych uogólnionych z zakresu ich zmienności i współrzędne te jednoznacznie określają położenie punktu na powierzchni kuli

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\theta - R^2 =$$

$$R^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + R^2\cos^2\theta - R^2 = R^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - R^2 = R^2 - R^2 \equiv 0$$

Określenie energii kinetycznej we współrzędnych uogólnionych

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = R\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - R\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = R\cos\theta\sin\varphi\dot{\theta} + R\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$z = R\cos\theta \Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial z}{\partial\theta}\dot{\theta} = -R\sin\theta\dot{\theta}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\begin{array}{l} R^2\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \\ -2R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ +R^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 \end{array}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) = \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

Do powyższego wzoru można dojść także prościej rozważając ruch ciała w układzie sferycznym współrzędnych , w którym do opisu położenia w przestrzeni służą 3 zmienne r, θ, φ

W tym układzie równanie więzów przyjmuje postać $f = r - R = 0$
Nie prowadza ona żadnych ograniczeń na współrzędne θ, φ które są dobrymi współrzędnymi uogólnionymi

Składowe prędkości w układzie sferycznym $v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r\dot{\theta}$ $v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$

Uwzględniając warunek $r = R = const$ z którego wynika m.in. iż $\dot{r} = 0$

otrzymujemy iż $v_r = 0$ $v_\theta = R\dot{\theta}$ $v_\varphi = R\sin\theta\dot{\varphi}$

$$T = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

W dalszych rozważaniach przyjmijmy iż os Oz jest skierowana pionowo do dołu. Wówczas składowe siły ciężkości w układzie kartezjańskim dane są wzorem

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = mg$$

Określenie potencjału

$$\begin{pmatrix} F_x = 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = 0 = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = mg = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow V = -mgz$$

We współrzędnych uogólnionych $V = -mgz = -mgR\cos\theta$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgR\cos(\theta)$$

θ, φ -współrzędne uogólnione

Pędy uogólnione

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$

Obliczenie funkcji *G* (uogólnionej energii)

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l(q,\dot{q},t)\dot{q}_l - L(q,\dot{q},t) = p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L =$$

$$= mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\sin^2\dot{\varphi}^2 - \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgR\cos(\theta) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgR\cos(\theta) = T + V$$

Wyznaczenie funkcji Hamiltona i sprawdzenie czy jest stalą ruchu

Ponieważ związki między współrzędnymi kartezjańskimi i sferycznymi (przyjętymi jako współrzędne uogólnione) nie zależą od czasu , a potencjał nie zależy od prędkości (czyli nie jest to potencjał uogólniony) to funkcja Hamiltona równa co do wartości funkcji *G* jest równa całkowitej energii mechanicznej ciała

W tym przypadku do policzenia funkcji Hamiltona nie trzeba korzystać koniecznie

ze wzoru ogólnego $$H=\sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l\left(q,p,t\right)-L(q,\dot{q}(q,p,t)$$

ale można skorzystać ze wzoru uproszczonego $$H=T\left(q,\dot{q}(q,p,t)\right)+V(q,t)$$

Uwzględniając to iż

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mR^2} \qquad p_\varphi = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$$

otrzymujemy

$$H=T+V=\frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2+\frac{m}{2}R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2-mgR\cos\theta=\frac{m}{2}R^2\frac{p_\theta^2}{m^2R^4}+$$

$$+\frac{m}{2}R^2\sin^2(\theta)\frac{p_\varphi^2}{m^2R^4\sin^4(\theta)}-mgR\cos(\theta)=\frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}\right)-mgR\cos(\theta)$$

Ponieważ funkcja Hamiltona nie zależy jawnie od czasu $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ to funkcja Hamiltona jest stałą ruchu .

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow H=const$$

Powyższy wniosek można było wyciągnąć także biorąc pod uwagę fakt iż funkcja Lagrange'a nie zależała jawnie od czasu $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}=0$

Funkcja Hamiltona $$H = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}\right) - mgR\cos(\theta)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2\theta}$$

Relacje identyczne z tymi definiującymi pędy uogólnione poprzez pochodne z funkcji Lagrange'a po współrzędnych uogólnionych

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \Rightarrow \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^3\theta}\cos\theta - mgR\sin(\theta)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = const$$

Pęd uogólniony $p_\varphi = mR^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$ związany ze współrzędna cykliczną φ **jest stałą (całką) ruchu.** Znajomość warunków początkowych ruchu pozwala określić jego wartość, co dalej pozwala przy znanej postaci zależności $\theta(t)$ określić zależność $\varphi(t)$ rozwiązując jedno równanie różniczkowe rzędu pierwszego
Uwzględnienie tego faktu pozwala także rozwiązać układ równań

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \qquad \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2}{mR^2 \sin^3\theta}\cos\theta - mgR\sin(\theta)$$

wyznaczający zależność $\theta(t), p_\theta(t)$ bez znajomości zależności od czasu $\varphi(t)$
Ponieważ θ nie jest współrzędną cykliczną to pęd związany z tą współrzędną $p_\theta = mR^2\dot{\theta}$ nie jest całką ruchu.

Czym jest pęd uogólniony p_φ

Pokażemy iż $p_\varphi = mR^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$ jest z-ową składową momentu pędu cząstki

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \Rightarrow \dot{x} = R\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta} - R\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi \Rightarrow \dot{y} = R\cos\theta\sin\varphi\dot{\theta} + R\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$z = R\cos\theta \Rightarrow \dot{z} = -R\sin\theta\dot{\theta}$$

$$L_z = xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\Big(R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\theta} + R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi} +$$

$$- R^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\theta} + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\dot{\varphi}\Big) = mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = p_\varphi$$

Wykorzystując to iż z-towa składowa momentu pędu jest całką ruchu

$$L_z = p_\varphi = mR^2 \sin^2\theta\dot{\varphi} = const$$

można wzór na funkcje Hamiltona przepisać w postaci

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}\right) - mgR\cos(\theta) = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2(\theta)}\right) - mgR\cos(\theta) =$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{L_z^2}{2mR^2\sin^2(\theta)} - mgR\cos(\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + V_{ef}(\theta)$$

gdzie $V_{ef}(\theta) = \frac{L_z^2}{2mR^2}\frac{1}{\sin^2(\theta)} - mgR\cos(\theta)$

Ma on zbliżoną postać do postaci funkcji Hamiltona dla cząstki poruszającej się w przestrzeni jednowymiarowej w polu o efektywnym potencjale $V_{ef}(\theta)$

Ponieważ liczbowo funkcja Hamiltona jest równa całkowitej energii ciała, która jest całką ruchu $H=const=E$, zaś $\frac{p_\theta^2}{2mR^2} \geq 0$ to ruch ciała może zachodzić tylko w obszarze w którym $E \geq V_{ef}(\theta)$

W ogólności gdy $L_z \neq 0$ to w czasie ruchu zachodzi relacja

$$0 < \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} < \pi$$ gdyż $\lim_{\theta\to 0,\pi} V_{ef}(\theta) = \infty$

Wniosek dodatkowy z przykładu

Gdy wśród *f* współrzędnych uogólnionych *k* współrzędnych jest współrzędnymi cyklicznymi (czyli funkcje Lagrange'a i Hamiltona od nich nie zależą) to funkcja Hamiltona zależy tylko od *f-k* współrzędnych i pędów zależnych od czasu (może tez jawnie zależeć od czasu). Pozostałe k pędów (sprzężonych kanonicznie ze współrzędnymi cyklicznymi) występujących w funkcji Hamiltona jest stałymi ruchu i można je wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.

Np. gdy funkcja Lagrange'a ma postać $L = L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

to $\dot{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 = const$

i funkcja Hamiltona zależy tylko od 2 zmiennych zależnych od czasu :

współrzędnej q_1 i pędu $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ (w przykładzie θ oraz p_θ)

Powyższe uproszczenie nie zachodzi dla funkcji Lagrange'a gdyż z tego iż

$p_2 = const$ nie wynika iż $\dot{q}_2 = const$

W ogólności może zachodzić $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} \neq const$ nawet wtedy gdy $p_2 = const$

(w przykładzie $\dot{\varphi} \neq const$ mimo tego iż $p_\varphi = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z = const$

Przykład. Elektron o ładunku e<0 w polu elektromagnetycznym opisanym przez potencjał skalarny $\varphi = V(r)$ ($r = |\vec{r}|$) oraz wektorowy $\vec{A} = -\frac{By}{2}\vec{i} + \frac{Bx}{2}\vec{j}$

-wyznaczenie funkcji Hamiltona oraz całek ruchu w biorąc za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie cylindrycznym

(częściowo do samodzielnej analizy)

Elektron porusza się w stałym jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wzdłuż osi Oz gdyż

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{By}{2} & \frac{Bx}{2} & 0 \end{vmatrix} = B\vec{k} = [0,0,B]$$

oraz polu elektrycznym $\vec{E} = -gradV - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$

gdyż $V = V(r) = V\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right) = V(\rho, z)$

Uwzględniając relację

$$x = \rho\cos(\varphi) \qquad y = \rho\sin(\varphi) \qquad \vec{e}_\rho = \vec{i}\cos(\varphi) + \vec{j}\sin(\varphi) \qquad \vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin(\varphi) + \vec{j}\cos(\varphi)$$

potencjał wektorowy można zapisać w układzie cylindrycznym :

$$\vec{A} = -\frac{By}{2}\vec{i} + \frac{Bx}{2}\vec{j} = \frac{B}{2}\left[-\rho\sin\varphi\vec{i} + \rho\cos\varphi\vec{j}\right] = \frac{B\rho}{2}\vec{e}_\varphi \qquad A_\rho = 0, A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, A_z = 0$$

Uwzględniając wzory na składowe prędkości w układzie cylindrycznym

$$v_\rho = \dot{\rho} \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \qquad v_z = \dot{z}$$

energia kinetyczna elektronu jest równa

$$T = \frac{m}{2}\left(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Potencjał uogólniony U jest równy

$A_\rho = 0, A_z = 0$

$A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$

$$U = eV(r) - e\vec{v}\cdot\vec{A} = eV(\rho, z) - e\left(v_\rho A_\rho + v_\varphi A_\varphi + v_z A_z\right) = eV(\rho, z) - ev_\varphi A_\varphi = eV(\rho, z) - \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$$

$$U = eV(r) - e\vec{v}\cdot\vec{A} = eV(r) - e\left(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z\right) = eV(r) - \frac{eB}{2}\left(-\dot{x}y + \dot{y}x\right) =$$

$A_x = -\frac{By}{2} \qquad A_y = \frac{Bx}{2} \qquad A_z = 0$

$$= eV(r) - \frac{eB}{2m}L_z = eV(\rho, z) - \frac{eB}{2m}m\rho^2\dot{\varphi} = eV(\rho, z) - \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$$

$L_z = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = m\rho^2\dot{\varphi}$ - z- towa składowa momentu pędu mechanicznego,

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$$

Na ruch elektronu nie nałożono więzów ρ, φ, z –współrzędne uogólnione

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - eV(\rho, z) + \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi}$$

Pędy uogólnione związane ze współrzędnymi uogólnionymi ρ, φ, z

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eB}{2}\rho^2 \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Obliczenie funkcji G $\quad G = \sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l - L$

$$G = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L =$$

$$= m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi} + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z) - \frac{eB}{2}\rho^2\dot{\varphi} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z) = T + eV(\rho, z)$$

Widać iż funkcja G (równa co do wartości funkcji Hamiltona) **nie** jest równa $T+U$ tylko sumie energii kinetycznej i potencjału skalarnego mnożonego przez ładunek cząstki. W przypadku gdy potencjał skalarny nie występuje (V=0) funkcja G jest równa energii kinetycznej ciała.

W celu znalezienia funkcji Hamiltona trzeba wyrazić funkcje G jako funkcje współrzędnych i pędów uogólnionych tak by nie zawierała prędkości uogólnionych.

Obliczenie funkcji Hamiltona H

$$p_\rho = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad\qquad p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{eB}{2}\rho^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{eB}{2m} = \frac{1}{m\rho}\left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{eB}{2}\rho\right) = \frac{1}{m\rho}\left(\frac{p_\varphi}{\rho} - A_\varphi\right)$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{eB}{2}\rho\right)^2 + p_z^2\right] + eV(\rho, z)$$

Ponieważ $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ to H jest stałą ruchu. Widać ponadto iż H ma postać

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_u - e\vec{A}\right)^2 + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m}\left[\left(p_{u\rho} - eA_\rho\right)^2 + \left(p_{u\varphi} - eA_\varphi\right)^2 + \left(p_{uz} - eA_z\right)^2\right] + eV(\rho, z)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_\rho - eA_\rho\right)^2 + \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - eA_\varphi\right)^2 + \left(p_z - eA_z\right)^2\right] + eV(\rho, z)$$

gdzie $p_{u\rho}, p_{u\varphi}, p_{uz}$ składowe w układzie cylindrycznym wektora $\vec{p}_u = m\vec{v} + e\vec{A}$

p_ρ, p_φ, p_z - pędy związane ze współrzędnymi uogólnionymi ρ, φ, z ; $A_\rho = 0, A_\varphi = \frac{B\rho}{2}, A_z = 0$

gdyż $$p_\varphi = p_{ux}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + p_{uy}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + p_{uz}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -p_{ux}\rho\sin\varphi + p_{uy}\rho\cos\varphi = \rho\vec{p}_u \cdot \vec{e}_\varphi = \rho p_{u\varphi}$$

$$p_\rho = p_{ux}\frac{\partial x}{\partial \rho} + p_{uy}\frac{\partial y}{\partial \rho} + p_{uz}\frac{\partial z}{\partial \rho} = p_{ux}\cos\varphi + p_{uy}\sin\varphi = \vec{p}_u \cdot \vec{e}_\rho = p_{u\rho} \qquad \vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin(\varphi) + \vec{j}\cos(\varphi)$$

$$H=\frac{1}{2m}\left[p_\rho^2+\left(\frac{p_\varphi}{\rho}-\frac{eB}{2}\rho\right)^2+p_z^2\right]+eV(\rho,z)=\frac{1}{2m}\left[p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}-eBp_\varphi+\frac{e^2B^2}{4}\rho^2+p_z^2\right]+eV(\rho,z)$$

Równania Hamiltona

$$\dot{\rho}=\frac{\partial H}{\partial p_\rho}=\frac{p_\rho}{m} \qquad \dot{p}_\rho=-\frac{\partial H}{\partial \rho}=\frac{p_\varphi^2}{m\rho^3}-\frac{e^2B^2}{4m}\rho-e\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2}-\frac{eB}{2m} \qquad \dot{p}_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0$$

$$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m} \qquad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-e\frac{\partial V}{\partial z}$$

p_z jest stałą ruchu gdy $V=V(\rho)$ czyli potencjał skalarny nie zależy od z

$p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}+\frac{eB}{2}\rho^2$ jest stałą ruchu i reprezentuje z-tową składową uogólnionego momentu pędu czyli wektora $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}_u=\vec{r}\times\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)=\vec{r}\times\left(m\dot{\vec{r}}+e\vec{A}\right)$

gdyż $\left(\vec{r}\times\vec{A}\right)_z=xA_y-yA_x=x\frac{Bx}{2}+y\frac{By}{2}=\frac{B}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{B}{2}\rho^2$

Przybliżona postać funkcji Hamiltona dla przypadku słabego pola magnetycznego

$$H=\frac{1}{2m}\left[p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}-eBp_\varphi+\frac{e^2B^2}{4}\rho^2+p_z^2\right]+eV(\rho,z)\approx\frac{1}{2m}\left[p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}-eBp_\varphi+p_z^2\right]+eV(\rho,z)$$

Opis przy wykorzystaniu zmiennych ρ,α,z służących do opisu ruchu w układzie odniesienia obracającym się wokół osi OZ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z częstością Larmora

$$\omega=-\frac{eB}{2m}=\frac{|e|B}{2m}$$

$$L=T-U=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2\right)-eV(\rho,z)+\frac{eB}{2}\rho^2\dot\varphi$$

Wprowadzamy nową zmienną $\alpha=\varphi-\omega t\Rightarrow\varphi=\alpha+\omega t\Rightarrow\dot\varphi=\dot\alpha+\omega$

$$L=T-U=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\alpha^2+2\rho^2\dot\alpha\omega+\rho^2\omega^2+\dot z^2\right)-eV(\rho,z)+\frac{eB}{2}\rho^2\dot\alpha+\frac{eB}{2}\rho^2\omega=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\alpha^2+2\rho^2\dot\alpha\omega+\rho^2\omega^2+\dot z^2\right)-eV(\rho,z)-m\omega\rho^2\dot\alpha-m\rho^2\omega^2=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\alpha^2-\rho^2\omega^2+\dot z^2\right)-eV(\rho,z)$$

$$p_\rho=\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}=m\dot\rho\Rightarrow\dot\rho=\frac{p_\rho}{m}$$

$$p_\alpha=m\rho^2\dot\alpha\Rightarrow\dot\alpha=\frac{p_\alpha}{m\rho^2}$$

$$p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot z}=m\dot z\Rightarrow\dot z=\frac{p_z}{m}$$

$$G = p_\rho \dot{\rho} + p_\alpha \dot{\alpha} + p_z \dot{z} - L = m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\alpha}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 - \rho^2\omega^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 + \rho^2\omega^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z) =$$

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad p_\alpha = m\rho^2\dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m\rho^2} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\alpha}^2 + \rho^2\omega^2 + \dot{z}^2\right) + eV(\rho, z) = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2\right] + \frac{m\rho^2\omega^2}{2} + eV(\rho, z) =$$

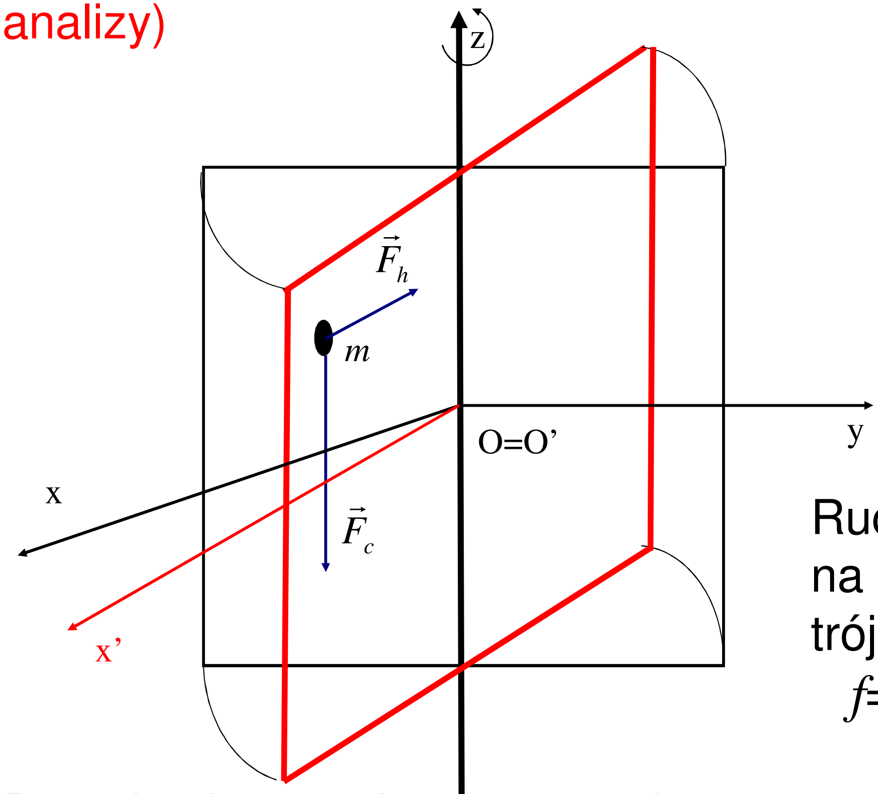
$$= \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2\right] + \frac{e^2B^2\rho^2}{8m} + eV(\rho, z) \approx \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2} + p_z^2\right] + eV(\rho, z) \qquad \omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|B}{2m}$$

Dla elektronu w atomie (traktowanego klasycznie) poruszającego się w płaszczyźnie z=0 pod wpływem siły centralnej pochodzącej np. od jadra mamy

$$H \approx \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\alpha^2}{\rho^2}\right] + eV(\rho) \overset{\rho=r}{=} H \approx \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\alpha^2}{r^2}\right] + eV(r)$$

W układzie obracającym się z częstością Larmora w przypadku gdy pole magnetyczne jest słabe funkcja Hamiltona jest taka jakby pola magnetycznego nie było. Obecność pola prowadzi więc w pierwszym przybliżeniu do precesji orbit elektronu z częstością Larmora. $\omega = -\frac{eB}{2m} = \frac{|e|B}{2m}$

Przykład -Cząstka o masie *m* poruszająca się po pionowej płaszczyźnie obracającej się wokół osi Oz z prędkością kątową ω pod wpływem siły ciężkości $F_c = -mg\vec{e}_z$ skierowanej wzdłuż osi Oz oraz siły zwróconej w kierunku osi Oz(do samodzielnej analizy)



$$\vec{F}_h = -kx\vec{i} - ky\vec{j} \qquad (k\text{-stała})$$

Równanie więzu reonomicznego (zależnego od czasu) we współrzędnych kartezjańskich w układzie nieruchomym inercjalnym

$$\frac{y}{x} = tg(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

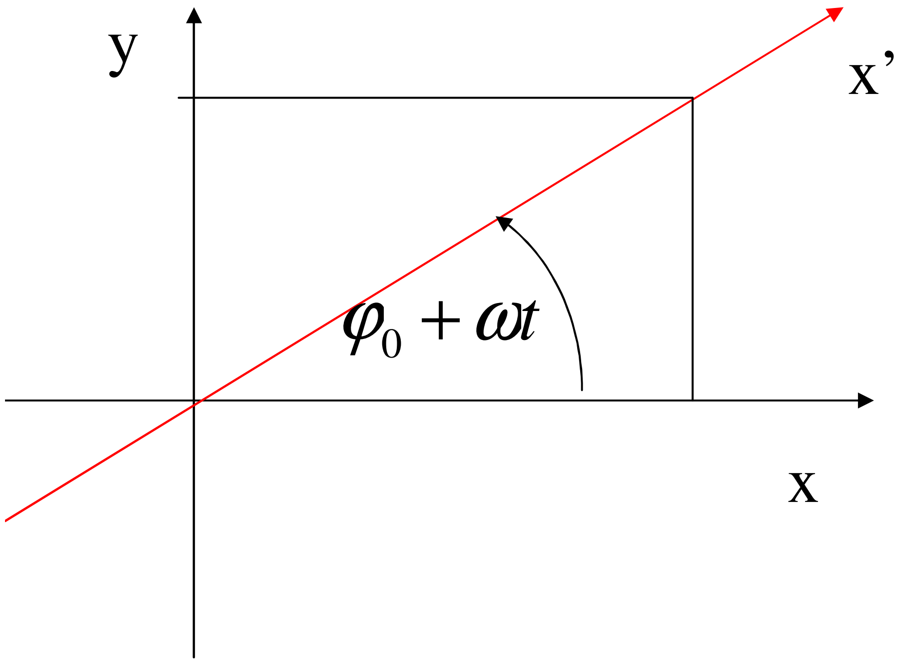
$$\Rightarrow f(x,y,t) = y\cos(\omega t + \varphi_0) - x\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

Ruch po płaszczyźnie pojedynczego ciała (*n*=1) na którego nałożono 1 wiąz (*p*=1) w przestrzeni trójwymiarowej $\Rightarrow$liczba stopni swobody:

f=3n-p=3-1=2

Do opisu jego ruchu należy wykorzystać 2 współrzędne uogólnione. Jedną z nich może być współrzędna *z* zaś drugą współrzędna *x'* określająca położenie ciała w nieinercjalnym układzie ruchomym O' o osi Ox' prostopadłej do pionu leżącej stale w płaszczyźnie ruchu. W takim układzie wektor wodzący ciała ma postać :

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' = x'\vec{i}\,' + 0\vec{j}\,' + z\vec{k}\,' \qquad \text{gdyż} \qquad y' = 0 \qquad z' = z$$



Związek między współrzędnymi *x* i *y* oraz współrzędną *x’* (gdy y’=0) ma postać

$$x = x'\cos(\varphi_0 + \omega t)$$
$$y = x'\sin(\varphi_0 + \omega t)$$

Oznaczmy współrzędną x’ jako ρ
a zatem $x = \rho\cos(\varphi_0 + \omega t)$

$$y = \rho\sin(\varphi_0 + \omega t)$$

Analizę ruchu przeprowadzimy **w układzie nieruchomym inercjalnym** przyjmując jako współrzędne uogólnione ρ oraz z

Równanie więzów $f(x, y, t) = y\cos(\omega t + \varphi_0) - x\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$

nie narzuca żadnych ograniczeń na wartości przyjmowane przez współrzędne uogólnione gdyż

$$f(x(\rho,t), y(\rho,t), t) = \rho\sin(\omega t + \varphi_0)\cos(\omega t + \varphi_0) - \rho\cos(\omega t + \varphi_0)\sin(\omega t + \varphi_0) \equiv 0$$

$$x = \rho\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad y = \rho\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad z = z$$

Określenie energii kinetycznej we współrzędnych uogólnionych

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \rho}\dot{\rho} = -\rho\omega\sin(\omega t + \varphi_0) + \dot{\rho}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\dot{\rho} = \rho\omega\cos(\omega t + \varphi_0) + \dot{\rho}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\Big(\rho^2\omega^2\left(\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right) + \dot{\rho}^2\left(\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right) +$$

$$- 2\rho\dot{\rho}\omega\sin(\omega t + \varphi_0)\cos(\omega t + \varphi_0) + 2\rho\dot{\rho}\omega\sin(\omega t + \varphi_0)\cos(\omega t + \varphi_0) + \dot{z}^2\Big) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\rho^2\omega^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Określenie potencjału

$$\begin{pmatrix} F_x = -kx = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -ky = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -mg = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow V = mgz + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Określenie potencjału we współrzędnych uogólnionych

$$V = mgz + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) = mgz + \frac{k}{2}\left(\rho^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \rho^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)\right) = mgz + \frac{k}{2}\rho^2$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{k}{2}\rho^2 - mgz$$

Pędy uogólnione

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Uogólniona energia

$$G = \sum_{l=1}^{f} p_l \dot{q}_l - L = p_\rho \dot{\rho} + p_z \dot{z} - L = m\dot{\rho}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k}{2}\rho^2 + mgz =$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 - \omega^2\rho^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k}{2}\rho^2 + mgz \neq T + V$$

Funkcja Hamiltona

$$H = H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t) = G(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t), \ldots, \dot{q}_f(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t), t)$$

$$p_\rho = m\dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad p_z = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$H = G(\rho, z, \dot{\rho}(p_\rho), \dot{z}(p_z),) \Rightarrow H = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_\rho}{m}\right)^2 - \omega^2\rho^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right) + \frac{k}{2}\rho^2 + mgz =$$

$$= \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \frac{k}{2}\rho^2 + mgz$$

Funkcja *H* równa liczbowo funkcji G ma wymiar energii, ale nie jest równa całkowitej energii mechanicznej (sumie energii kinetycznej i potencjalnej) w układzie nieruchomym. Wynika to z faktu iż w relacjach wiążących współrzędne w układzie kartezjańskim ze współrzędnymi uogólnionymi występuje w sposób jawny czas.

$$H = H(\rho, z, p_\rho, p_z) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2 + \frac{k}{2}\rho^2 + mgz$$

Sprawdzenie czy funkcja H jest stałą ruchu $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = const$$

Funkcja Hamiltona jest stalą ruchu gdyż nie zależy jawnie od czasu (podobnie jak funkcja Lagrange'a)

Równania Hamiltona

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \qquad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \qquad (l=1,\ldots,f=2)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = m\omega^2\rho - k\rho$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg$$

Pęd uogólniony p_z nie jest stałą ruchu.

Pęd uogólniony p_ρ nie jest stałą ruchu gdy $k \neq m\omega^2$.