

Dynamika ruchu obrotowego bryły

Bryła sztywna się składa z wielu punktów materialnych przy czym odległości między dowolnymi punktami bryły nie ulegają zmianie w czasie ruchu bryły.

Bryła sztywna może podlegać:

- a) ruchowi postępowemu w którym wszystkie punkty bryły poruszają się z jednakową prędkością (co do wartości, kierunku i zwrotu) – opis analogiczny do opisu ruchu punktu materialnego
- b) ruchowi obrotowemu w którym wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach, których środki leżą na osi obrotu, z jednakową prędkością kątową
- c) złożeniu obu ruchów przy czym kierunek osi obrotu może ulegać w ogólności zmianie w czasie

Ruch po okręgu-prędkość i przyspieszenie kątowe

Przy opisie ruchu obrotowego bryły wystarczy analizować ruch dowolnego jej punktu nie leżącego na osi obrotu w ruchu po okręgu. Do opisu ruchu obrotowego bryły wokół osi o stałym kierunku w przestrzeni mogą służyć wielkości wprowadzone przy opisie ruchu punktu materialnego po okręgu.

- 1) kąt φ między wektorem wodzącym dowolnego punktu bryły poruszającego się po okręgu a osią OX układu współrzędnych o początku w środku okręgu leżąca w płaszczyźnie okręgu.

- 2) prędkość kątowna

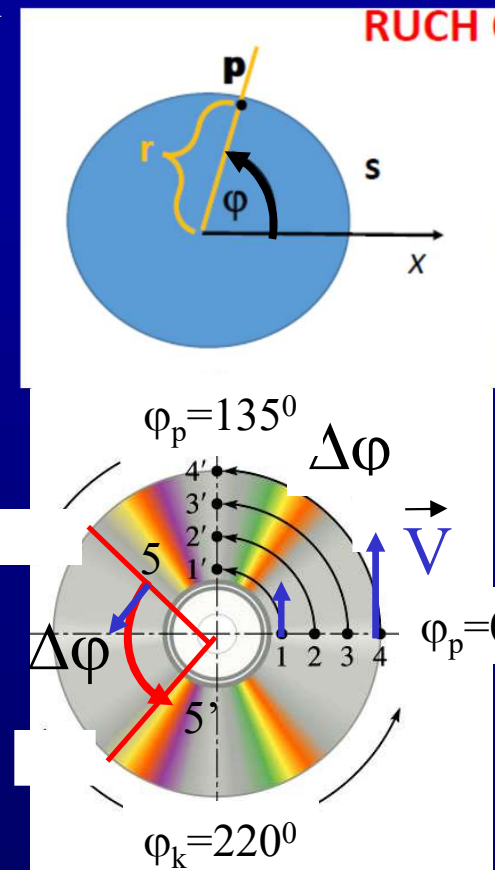
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

- 3) przyspieszenie kątowne

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Kąt φ dla różnych punktów bryły jest w ogólności różny (np. punkty 1 i 5). Jest taki sam tylko dla punktów leżących na tej samej półprostej przecinającej oś obrotu pod kątem prostym – punkty 1,2,3,4).

Zmiany tego kąta w czasie są jednak takie same dla wszystkich punktów. Dlatego prędkość kątowna i przyspieszenie kątowne są jednakowe dla wszystkich punktów i opisują ruch bryły jako całości. Zaleta w stosunku do wektorów prędkości $\vec{V}$, przyspieszenia $\vec{a}$, oraz szybkości $|\vec{V}|$ które są w ogólności inne dla różnych punktów bryły i nie opisują ruchu bryły jako całości.



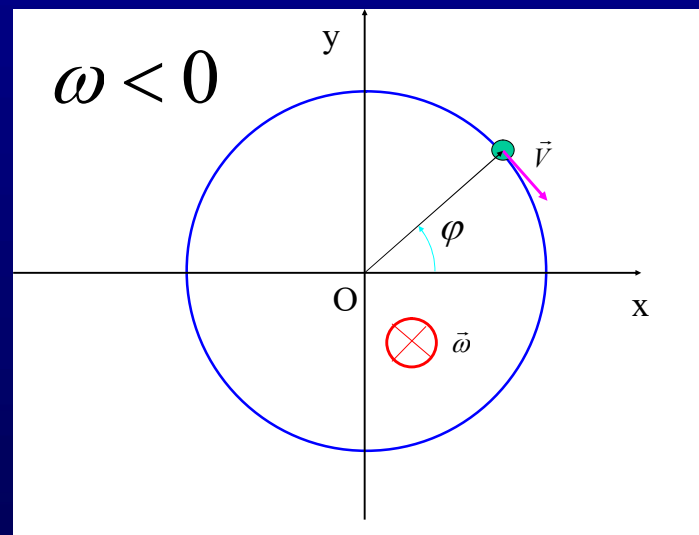
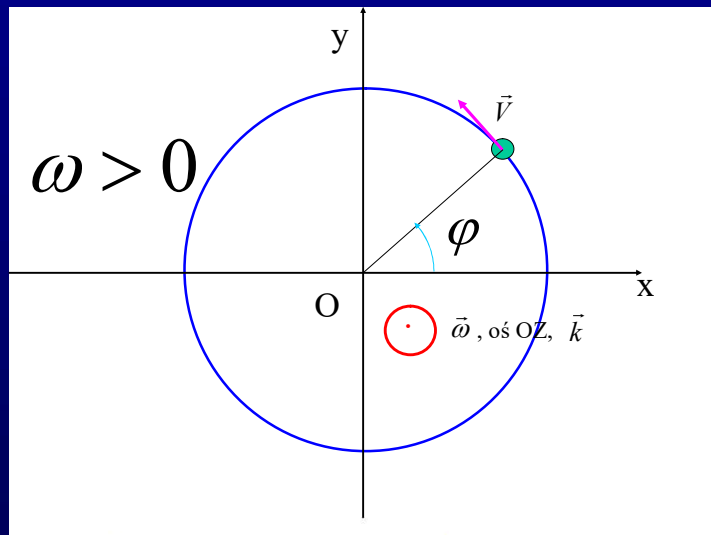
Prędkość kąтова jako wektor

Prędkość kąтова jest wektorem, którego kierunek i zwrot możemy ustalić analizując ruch dowolnego punktu bryły, który porusza się po okręgu.

Wektor ten ma kierunek zgodny z kierunkiem osi obrotu (prostopadłym do płaszczyzny okręgów po których poruszają się punkty bryły).

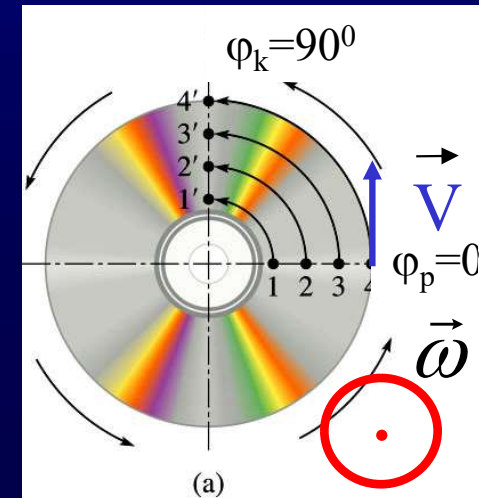
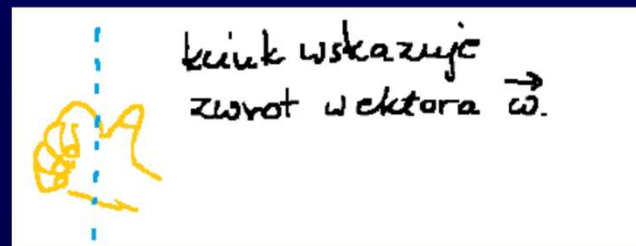
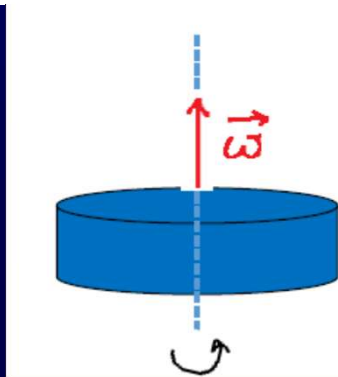
Zwrot wektora prędkości kątowej można ustalić przy pomocy reguły prawej ręki.

Gdy palce prawej ręki wskazują kierunek obiegu punktu po okręgu, to prawy kciuk wskazuje zwrot wektora prędkości kątowej.



$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = [0, 0, \omega]$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



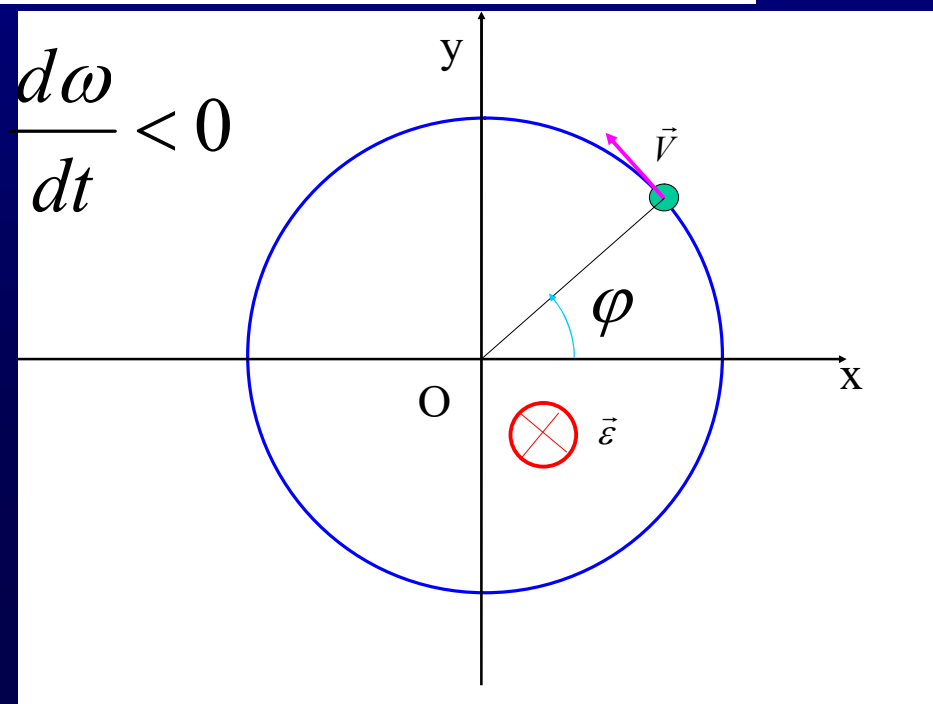
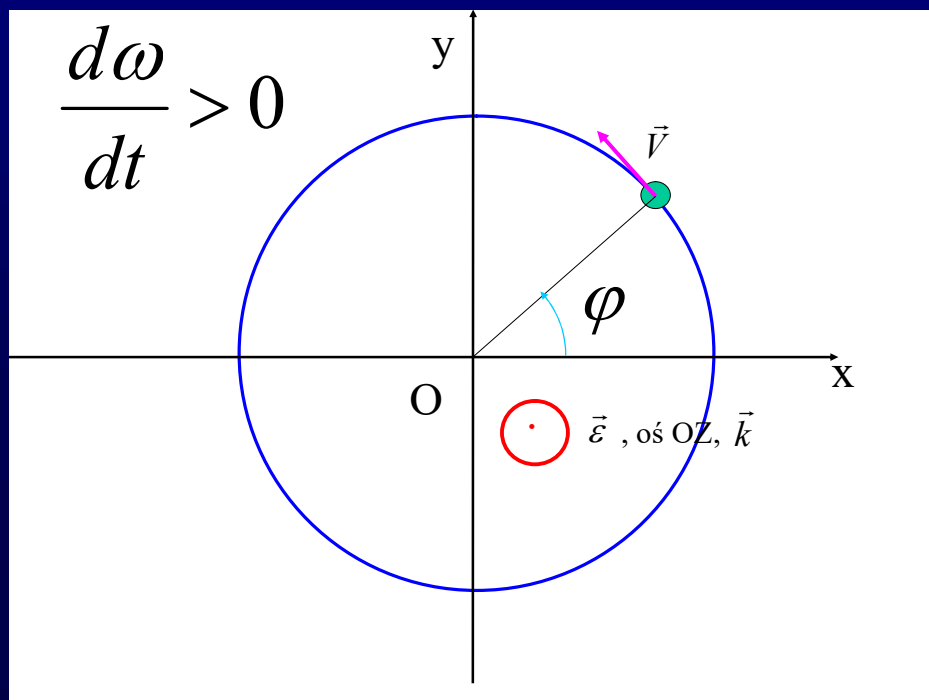
Przyspieszenie kątowe jako wektor

Przyspieszenie kątowe też jest wektorem, którego kierunek i zwrot ustalamy tak jak dla dowolnego punktu bryły, który porusza się po okręgu.

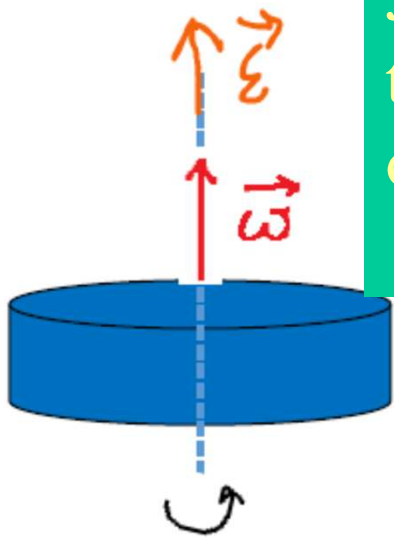
Zakładamy, iż orientacja osi obrotu nie ulega zmianie w czasie (okrąg po którym porusza się każdy z punktów leży stale w tej samej płaszczyźnie).

Wówczas wektor przyspieszenia kątowego ma kierunek zgodny z kierunkiem osi obrotu. Zwrot wektora przyspieszenia kątowego jest taki sam jak prędkości kątowej gdy szybkość punktów bryły rośnie i przeciwny gdy szybkość punktów maleje.

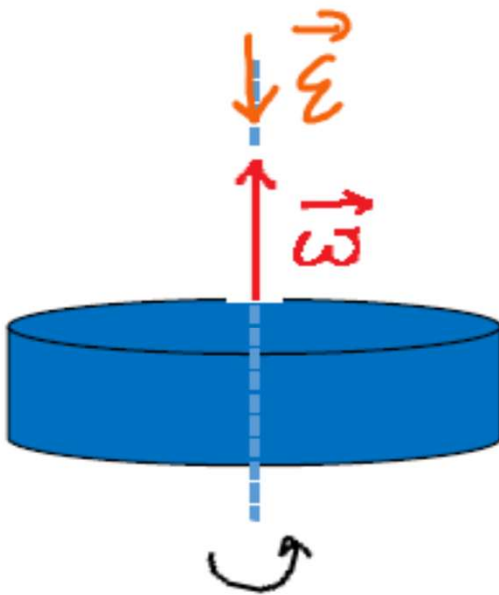
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = [0, 0, \varepsilon] = [0, 0, \frac{d\omega}{dt}]$$



Jeżeli wektory $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{\omega}$ mają ten sam zwrot to bryła obraca się coraz szybciej.



Jeżeli wektory $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{\omega}$ mają przeciwny zwrot to bryła obraca się coraz wolniej

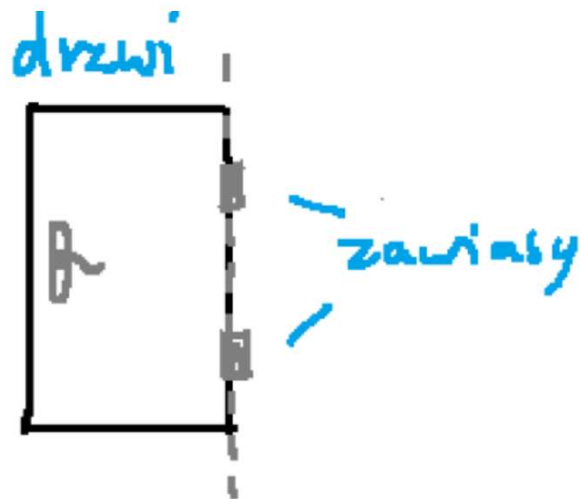


Pyt. Rozważyć ruch obrotowy bryły wokół ustalonej osi obrotu. Które z poniższych wielkości są jednakowe dla wszystkich punktów bryły?

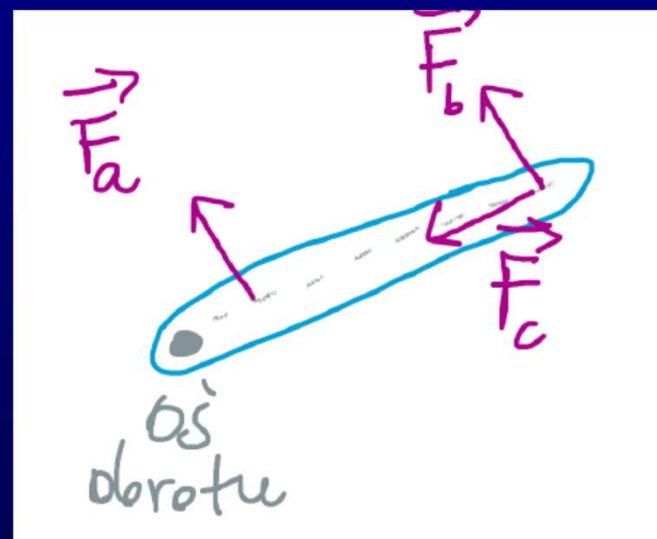
- a) przyspieszenie
- b) przyspieszenie kątowe
- c) prędkość
- d) szybkość (długość wektora prędkości)
- e) prędkość kątowa
- f) przyspieszenie styczne

Jak wprowadzić ciało w ruch obrotowy?

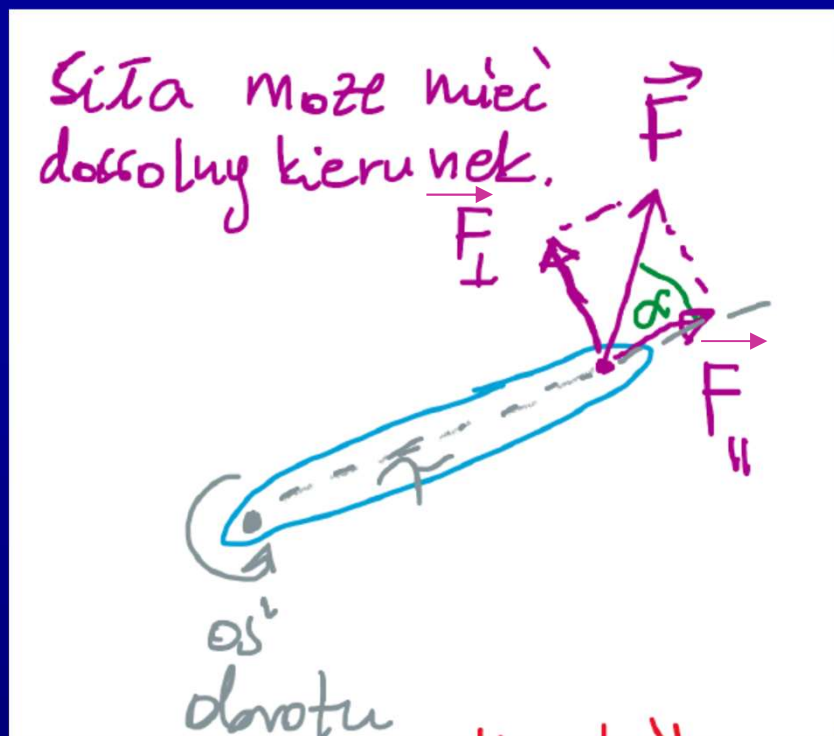
Aby wprowadzić ciało w ruch obrotowy należy **podziałać** na nie **siłą**. **Ważne jest jednak miejsce przyłożenia siły i jej kierunek**. Nie każda siła może wywołać obrót ciała.



Jeśli próbując otworzyć drzwi przyłożymy siłę na linii zawiasów lub w kierunku równoległym do skrzydła drzwi to ich nie otworzymy.



Trzy siły przykładamy w różnych miejscach tego samego ciała. Siła przyłożona dalej od osi obrotu jest bardziej skuteczna w powodowaniu obrotu ciała, niż siła przyłożona bliżej osi obrotu. Siła F_c nie wywołuje obrotu ciała.



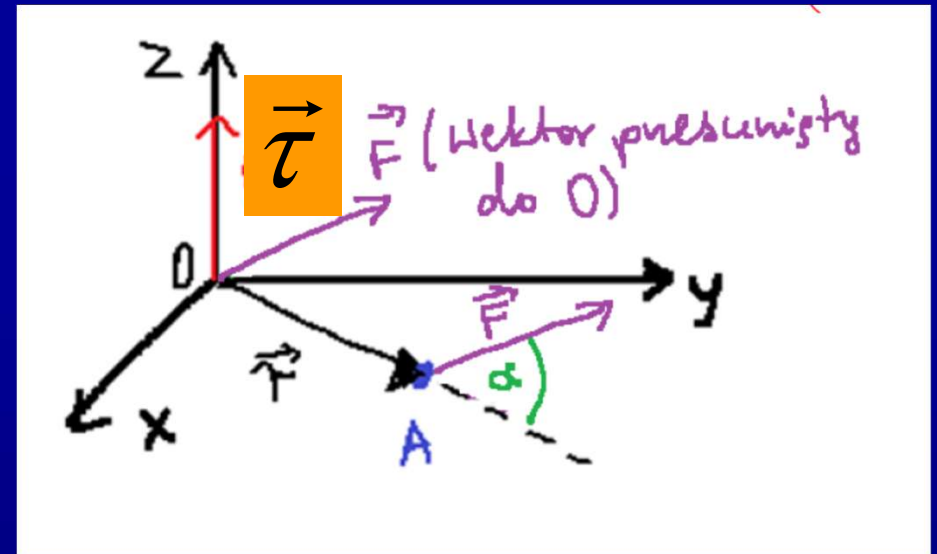
- $F_{\perp}$ – Składowa prostopadła do linii łączącej punkt zamocowania pręta i punkt przyłożenia siły F . **Powoduje obrót, więc „użyteczna”**
- $F_{\parallel}$ – Składowa równoległa do linii łączącej punkt zamocowania pręta i punkt przyłożenia siły F . **Nie powoduje obrotu, więc „nieużyteczna”**

Wielkością fizyczną odpowiedzialną za wprawienie ciała w ruch obrotowy jest moment siły $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ określony względem nieruchomego punktu leżącego na osi obrotu którego wartość jest równa $|\vec{\tau}| = rF \sin(\alpha) = rF_{\perp}$

Zależy on tylko od użytecznej składowej siły i jego wartość rośnie wraz ze wzrostem odległości punktu do którego przyłożyliśmy siłę od osi obrotu

Moment siły jest prostopadły do płaszczyzny w której leżą wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$ i jego kierunek często pokrywa się z tą osią

Gdy tak nie jest to za wprowadzenie ciała w ruch obrotowy względem ustalonej osi obrotu odpowiada rzut momentu siły na tę ustaloną oś obrotu.



Gdy na bryłę działa kilka sił wielkością mająca bezpośredni wpływ na ruch obrotowy bryły jest wypadkowy moment tych sił (lub jego rzut na oś obrotu).

Wypadkowy moment siły jest równy sumie wektorowej momentów wszystkich rozważanych sił (określających siłę wypadkową). Wszystkie te momenty muszą być określone względem tego samego punktu O względem którego określamy wypadkowy moment siły.

Wypadkowy moment siły działający na punkt materialny

Gdy na punkt materialny działa kilka sił to wówczas wypadkowy moment siły jest równy momentowi siły wypadkowej

$$\vec{\tau}_w = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_w$$

bo wszystkie siły są przyłożone do tego samego punktu i wszystkie wektory $\vec{r}_i$ określające miejsce przyłożenia kolejnych sił $\vec{F}_i$ są jednakowe i równe wektorowi wodzącemu punktu $\vec{r}_i = \vec{r}$

Wypadkowy moment siły działający na układ punktów materialnych (także bryłę sztywną złożoną z nieprzeliczalnej ilości punktów)

Wypadkowy moment siły **nie jest** równy momentowi siły wypadkowej działającej na układ gdyż różne siły mogą być przyłożone do różnych punktów układu

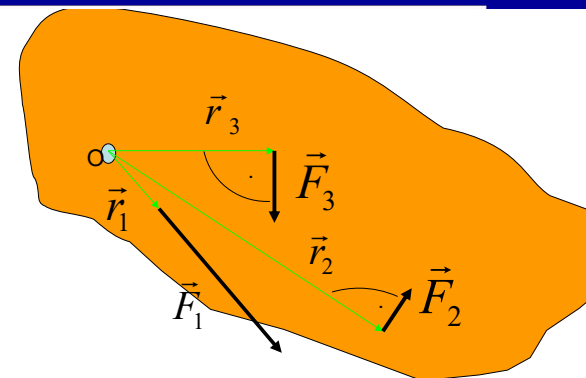
Gdy siła $\vec{F}_j$ jest przyłożona do innego punktu niż siła $\vec{F}_i$ to $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$

Wypadkowy moment siły jest równy sumie momentów wszystkich sił

$$\vec{\tau}_w = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Gdy siły działające między punktami układu są równoległe do prostych łączących te punkty to nie wnoszą one wkładu do wypadkowego momentu siły, który jest równy sumie momentów sił zewnętrznych nie związanych z oddziaływaniami między punktami układu.

Pyt. Trzy siły o wartościach $F_1=7\text{N}$, $F_2=2\text{N}$ i $F_3=3\text{N}$ przyłożone są do bryły sztywnej, która może obracać się względem osi przechodzącej przez punkt O prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Siły te leżą w płaszczyźnie poniższego rysunku, są przyłożone do punktów bryły leżących w tej płaszczyźnie w odległościach od punktu O równych $r_1=20\text{cm}$, $r_2=80\text{cm}$ i $r_3=40\text{cm}$ odpowiednio.



Co można powiedzieć o wypadkowym momencie siły określonym względem punktu O? **Które z poniższych twierdzeń jest prawdziwe?**

- Wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i jest zwrócony za płaszczyznę rysunku a jego długość jest równa $0,4\text{N} \cdot \text{m}$.
- Wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i jest zwrócony przed płaszczyznę rysunku a jego długość jest równa $0,4\text{N} \cdot \text{m}$.
- Wektor momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku a jego długość jest równa $2,8\text{N} \cdot \text{m}$.
- Wektor momentu siły leży w płaszczyźnie rysunku a jego długość jest równa $4,2\text{N} \cdot \text{m}$.

Moment siły F_1 jest równy 0

Wartość momentu siły F_2 jest równa $1,6\text{ N}\cdot\text{m}$ i moment ten jest skierowany przed płaszczyznę rysunku

Wartość momentu siły F_3 jest równa $1,2\text{ N}\cdot\text{m}$ i moment ten jest skierowany za płaszczyznę rysunku

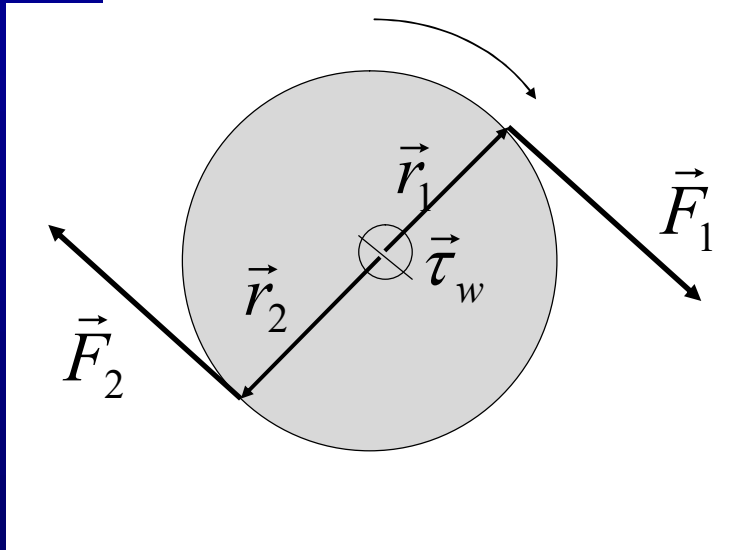
Wartość wypadkowego momentu siły jest więc równa $(1,6-1,2)\text{ N}\cdot\text{m} = 0,4\text{ N}\cdot\text{m}$ i ma taki zwrot jak moment siły $F_2 \Rightarrow$

Odp. b jest prawidłowa

Bryła pozostająca w spoczynku może zacząć się obracać nawet wówczas gdy siła wypadkowa jest równa zero

$$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Środek masy w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym



Bryła pozostająca przed przyłożeniem tych sił w spoczynku zaczyna jednak podlegać ruchowi obrotowemu wokół osi obrotu przechodzącej przez środek masy O gdyż wypadkowy moment sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ względem O jest różny od zera co pokazano poniżej

$$\vec{\tau}_w = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \neq 0$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$$

Opis ruchu obrotowego bryły można wyprowadzić z relacji wiążącej ze sobą wypadkowy moment tych sił z $\vec{L}$ momentem pędu bryły

Do opisu ruchu bryły wokół ustalonej osi obrotu wykorzystuje się rzuty momentu pędu i siły na tą oś

$$\vec{\tau}_w = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Moment pędu układu punktów materialnych (bryły sztywnej) określony względem punktu O

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

(suma wektorów)

pęd i -tego punktu

wektor określający położenie i -tego punktu w układzie o początku w punkcie O

moment pędu i -tego punktu

suma po wszystkich punktach materialnych układu

Jest on równy sumie momentów pędu wszystkich punktów materialnych tworzących rozważany układ (także bryłę sztywną). Wszystkie te momenty muszą być określone względem tego samego punktu O względem którego określamy moment pędu układu. Praktyczny sposób określenia rzutu momentu pędu bryły na oś obrotu zostanie podany w dalszej części wykładu .

Związek momentu siły z momentem pędu

$$\vec{\tau}_w = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Szybkość zmiany w czasie momentu pędu układu punktów materialnych (bryły sztywnej) jest równa wypadkowemu momentowi siły będącemu sumą wektorową momentów sił działających na wszystkie punkty układu (wszystkie punkty bryły). Momenty pędu i siły są określone względem tego samego punktu nieruchomego w układzie inercyjnym (np. początku układu).

Dowód relacji powyższej relacji wynika z prawdziwości analogicznej relacji zachodzącej dla pojedynczego i -tego punktu wiążącej moment pędu tego punktu z wypadkowym momentem siły działającej na ten punkt

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_{iw} \Rightarrow \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{iw} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \vec{\tau}_w \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_w$$

Relacja powyższa pozostaje prawdziwa także gdy moment pędu układu punktów materialnych i wypadkowy moment siły działający na ten układ określimy względem punktu leżącego w środku masy układu punktów materialnych (bez dowodu). W szczególności w przypadku bryły sztywnej punktem tym jest środek masy bryły.

Gdy siły działające między punktami układu są równoległe do prostych łączących te punkty to nie wnoszą one wkładu do wypadkowego momentu siły. W szczególności przyjmujemy iż siły działające między punktami bryły sztywnej nie dają wkładu do tego momentu.

Rzut momentu siły na oś obrotu

Do policzenia $\vec{\tau}_{\parallel}$ rzutu momentu siły względem punktu O leżącego na osi obrotu na pewien kierunek np. ustalony przez kierunek osi obrotu Oz możemy stosować wzór

$$\vec{\tau}_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp}$$

$\vec{r}_{\perp}$ - rzut wektora $\vec{r}$ na płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu

$\vec{F}_{\perp}$ - rzut wektora $\vec{F}$ na płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu

$\vec{r}_{\parallel}$ $\vec{F}_{\parallel}$ - rzut wektorów $\vec{r}$ i $\vec{F}$ na oś obrotu

Dowód. Ponieważ $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$ to $\vec{\tau} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F} + \vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}$

Ponieważ $\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$ to $\vec{r}_{\perp} \times \vec{F} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\perp} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}$

$$\vec{r}_{\parallel} \parallel os \quad Oz \Rightarrow (\vec{r}_{\parallel} \times \vec{F}) \perp os \quad Oz$$

$$\vec{F}_{\parallel} \parallel os \quad Oz \Rightarrow (\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}_{\parallel}) \perp os \quad Oz$$

Te dwa z trzech członów nie wnoszą więc wkładu do $\vec{\tau}_{\parallel}$

Rzut $\vec{\tau}_{\parallel}$ na os obrotu nie zależy od wyboru punktu O na osi obrotu

Gdy oś obrotu pokrywa się z osią Oz to wektor $\vec{\tau}_{\parallel}$ ma różną od zera tylko składową z-ową τ_z

$\tau_z = |\vec{\tau}_{\parallel}|$ gdy zwrot osi Oz zgodny ze zwrotem wektora $\vec{\tau}_{\parallel}$

$\tau_z = -|\vec{\tau}_{\parallel}|$ gdy zwrot osi Oz przeciwny do zwrotu wektora $\vec{\tau}_{\parallel}$

Określenie rzut momentu pędu obracającej się bryły na oś obrotu OZ względem dowolnego punktu O na osi obrotu

Określamy wektor moment pędu i-tego punktu bryły i przedstawiamy go jako sumę wektora równoległego do osi obrotu $\vec{L}_{i||}$ i prostopadłego do tej osi $\vec{L}_{i\perp||}$

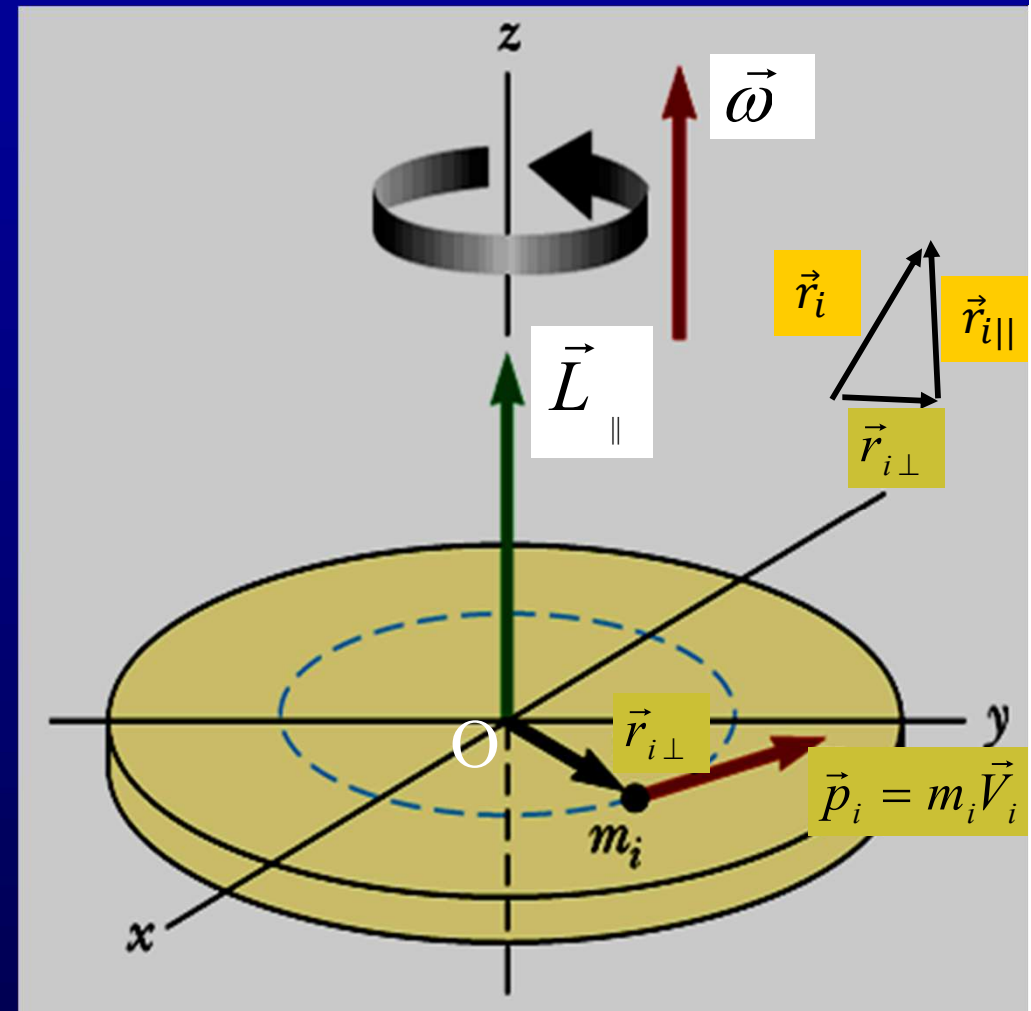
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i + \vec{r}_{i||} \times \vec{p}_i = \vec{L}_{i||} + \vec{L}_{i\perp}$$

$$\vec{L}_{i||} = \vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i || os \quad Oz$$

bo wektor pędu $\vec{p}_i$ i rzut wektora wodzącego na płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu $\vec{r}_{i\perp}$ tego punktu leżą w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu OZ a wektor będący iloczynem wektorowym dwóch wektorów jest prostopadły do płaszczyzny w której leżą oba wektory

$$\vec{L}_{i\perp} = \vec{r}_{i||} \times \vec{p}_i \perp os \quad Oz$$

bo wektor rzut wektora wodzącego na oś obrotu $\vec{r}_{i||}$ tego punktu jest równoległy do osi obrotu OZ a wektor będący iloczynem wektorowym dwóch wektorów jest prostopadły do obu wektorów



Rzut momentu pędu obracającej się bryły na oś obrotu (określony względem dowolnego punktu na osi obrotu)

$$\vec{L}_{||} = \sum_i \vec{L}_{i||} = \sum_i \vec{r}_{i\perp} \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{V}_i$$

Suma po punktach tworzących bryłę

Zwrot rzutu momentu pędu jednakowy dla wszystkich punktów bryły

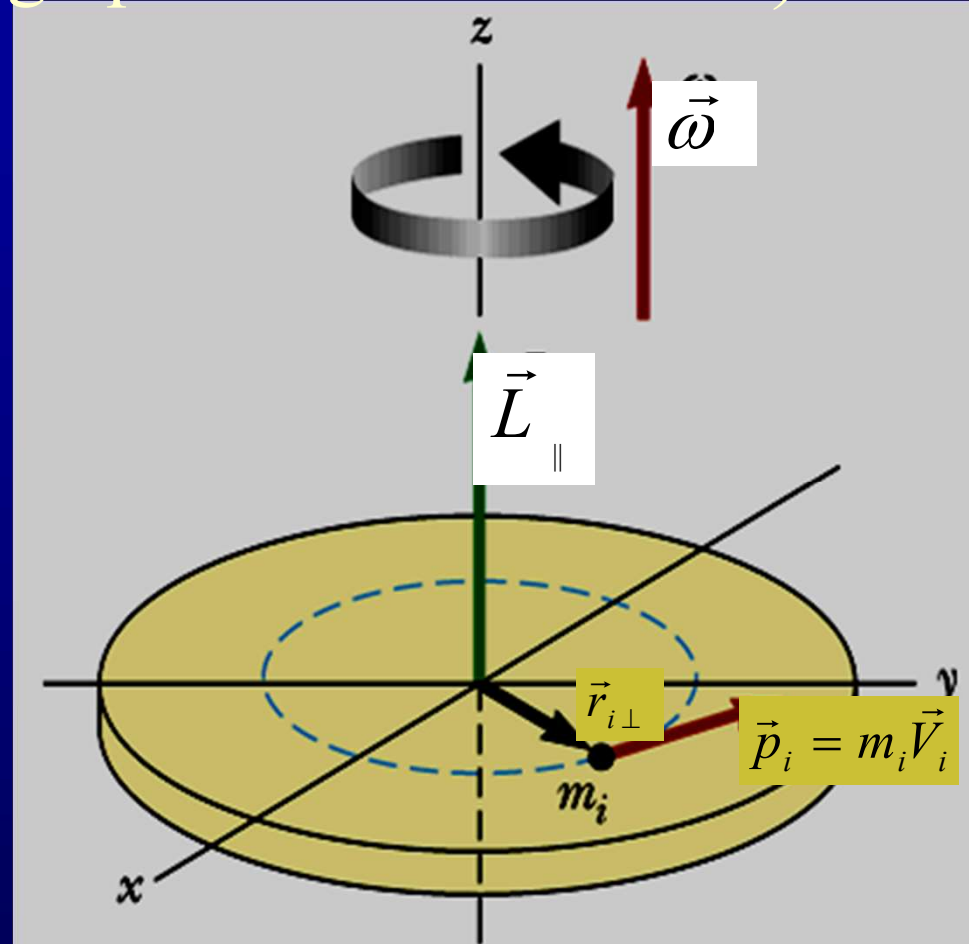
$$|\vec{L}_{||}| = \sum_i |\vec{L}_{i||}|$$

$|\vec{r}_{i\perp}|$ - promień okręgu po którym porusza się i-ty punkt

$$\vec{r}_{\perp i} \perp \vec{V}_i$$

$$|\vec{V}_i| = |\vec{r}_{i\perp}| |\vec{\omega}|$$

$$|\vec{L}_{||}| = \sum_i |\vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{V}_i| = \sum_i m_i |\vec{r}_{i\perp}| |\vec{V}_i| = |\vec{\omega}| \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$



Ponieważ zwrot rzutu momentów pędu dla wszystkich punktów bryły taki jak zwrot wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ to $\vec{L}_{||} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$ Moment bezwładności

Moment bezwładności względem osi obrotu

masa i -tego punktu

odległość od osi
 i -tego punktu

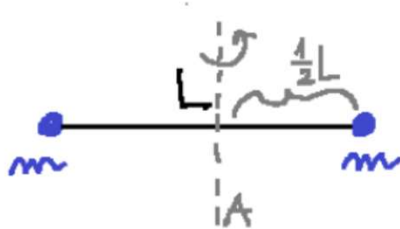
$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Charakteryzuje rozkład masy bryły względem osi obrotu

Suma po punktach układu

Prz. Ciało sztywne złożone jest z dwóch cząstek o masie m połączonych prętem o znikomej masie i długości L .

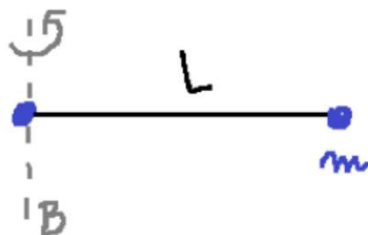
a) Oblicz moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do niego.



$$J_A = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

$$r_{1\perp} = r_{2\perp} = L/2, \quad m_1 = m_2 = m$$

b) Oblicz moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez lewy koniec pręta i prostopadłej do niego.



$$J_B = m \cdot 0^2 + mL^2 = mL^2$$

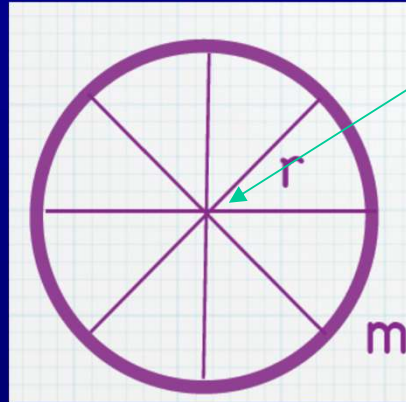
$$r_{1\perp} = 0, \quad r_{2\perp} = L, \quad m_1 = m_2 = m$$

Moment bezwładności

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

W ogólnym przypadku brył sztywnych złożonych z nieskończonej ilości punktów suma zawiera nieskończenie wiele nieskończenie małych wyrazów .

Cienkościenna obręcz



Oś obrotu

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \stackrel{r_{i\perp} = \text{const} = r}{=} = r^2 \sum_i m_i = r^2 m$$

W praktycznych obliczeniach sumę często musimy zastąpić całką

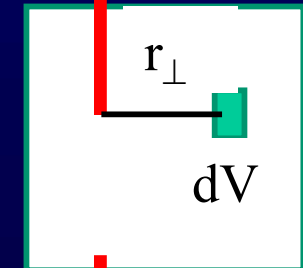
$dm(dV)$ - masa (objętość) elementu bryły leżącego w odległości od osi obrotu z zakresu $(r_{\perp}, r_{\perp} + dr_{\perp})$ gdzie $dr_{\perp} \rightarrow 0$

$$I = \int_m r_{\perp}^2 dm = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV \stackrel{\rho = \text{const}}{=} \rho \int_V r_{\perp}^2 dV$$

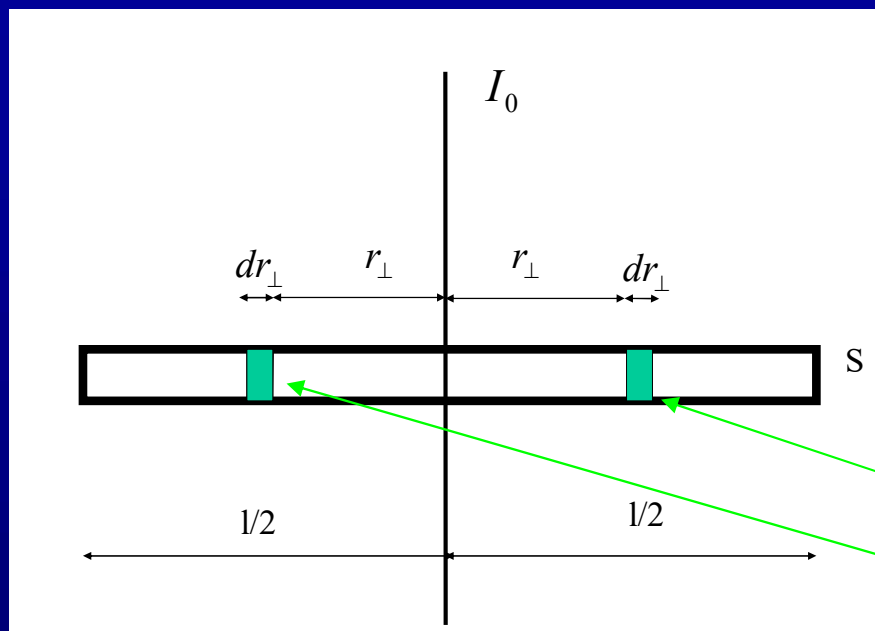
ρ

-gęstość bryły

całka po objętości bryły



Moment bezwładności pręta (dla zainteresowanych)



$$I = \int_m r_{\perp}^2 dm = \int_V \rho r_{\perp}^2 dV \stackrel{\rho = \text{const}}{=} \rho \int_V r_{\perp}^2 dV$$

S – pole przekroju pręta

$dV = f(r_{\perp}) \cdot dr_{\perp}$ – objętość części pręta położonej w odległości z zakresu $(r_{\perp}, r_{\perp} + dr_{\perp})$ od osi obrotu $dr_{\perp} \rightarrow 0$

$$dV_1 = S \cdot dr_{\perp}$$

$$dV = dV_1 + dV_2 = 2S \cdot dr_{\perp}$$

$$dV_2 = S \cdot dr_{\perp}$$

$$dm = \rho dV = 2\rho S \cdot dr_{\perp}$$

W przypadku rozważanym pręta o stałym przekroju $f(r_{\perp}) = 2S = \text{const}$

$$\frac{dr_{\perp}^3}{dr_{\perp}} = 3r_{\perp}^2$$

$$I_0 = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV = \rho \int_{r_{\perp, \min}=0}^{r_{\perp, \max}=l/2} r_{\perp}^2 f(r_{\perp}) dr_{\perp} = 2\rho S \int_0^{l/2} r_{\perp}^2 dr_{\perp} = 2\rho S \cdot \frac{1}{3} r_{\perp}^3 \Big|_0^{l/2} = \frac{2}{3} \rho S \cdot \left(\frac{l^3}{8} - 0 \right) = \frac{1}{12} \rho S l^3$$

gęstość pręta $\rightarrow$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl}$$

$$I_0 = \frac{1}{12} \rho S l^3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{Sl} \cdot S l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$

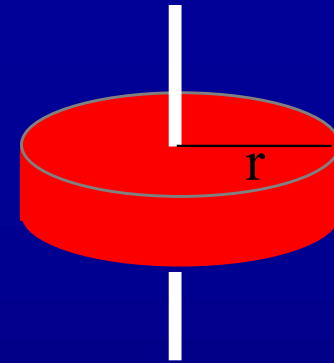
l – długość pręta; m – masa pręta; V – objętość pręta

Moment bezwładności wybranych brył o stałej gęstości

Dysk (walec)

(względem osi symetrii
walca)

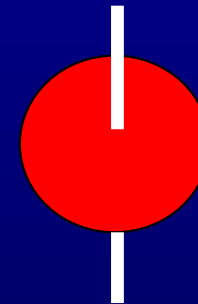
$$I = \frac{1}{2} m r^2$$



Kula o promieniu r

(względem osi
przechodzącej przez
środek kuli)

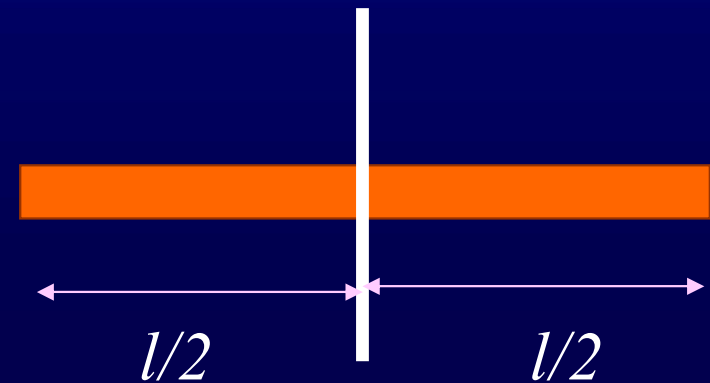
$$I = \frac{2}{5} m r^2$$



Pręt o długości l

(względem osi
prostopadłej do pręta
przechodzącej przez jego
środek)

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$



m -masa bryły

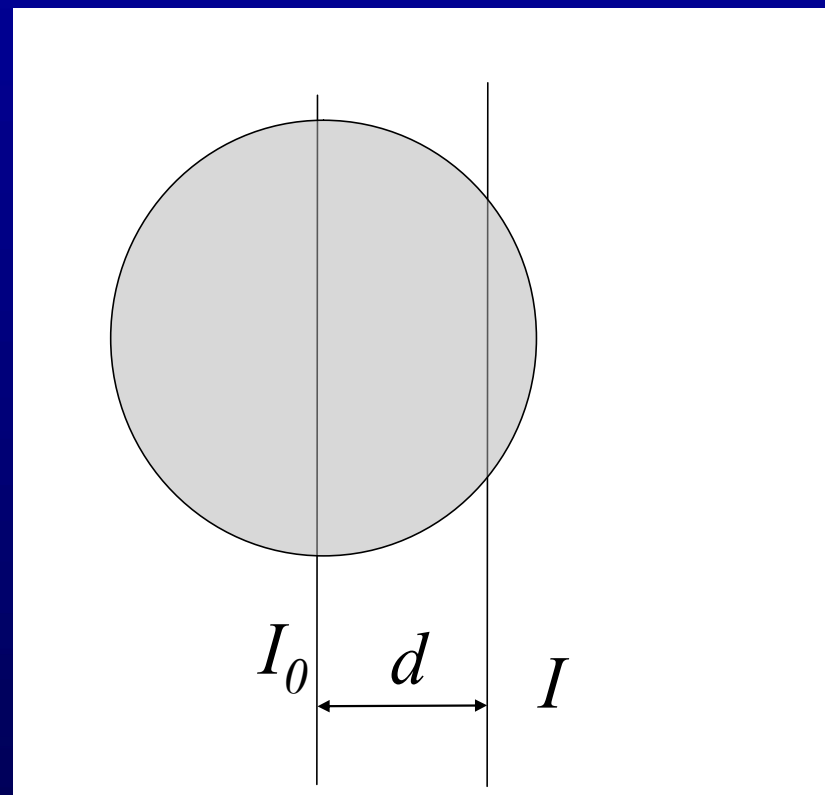
Twierdzenie Steinera

$$I = I_0 + md^2$$

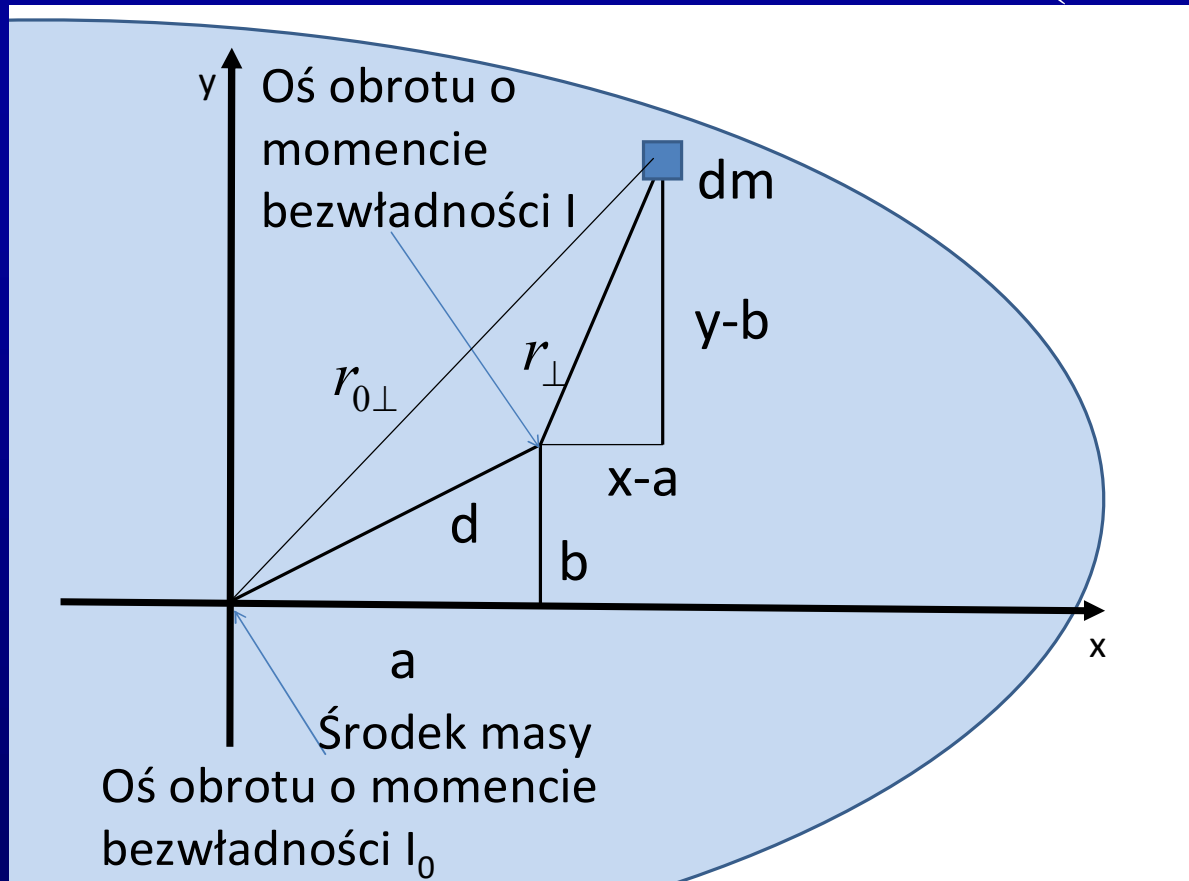
I_0 -moment bezwładności
względem osi przechodzącej
przez środek masy bryły

I -moment bezwładności
względem osi równoległej do
osi przechodzącej przez środek
masy bryły

m -masa bryły,
 d -odległość między osiami



Dowód Twierdzenia Steinera (dla zainteresowanych)



$$\int x dm = m \left(\frac{1}{m} \int x dm \right) = m x_{sm} = 0$$

$$\int y dm = m \left(\frac{1}{m} \int y dm \right) = m y_{sm} = 0$$

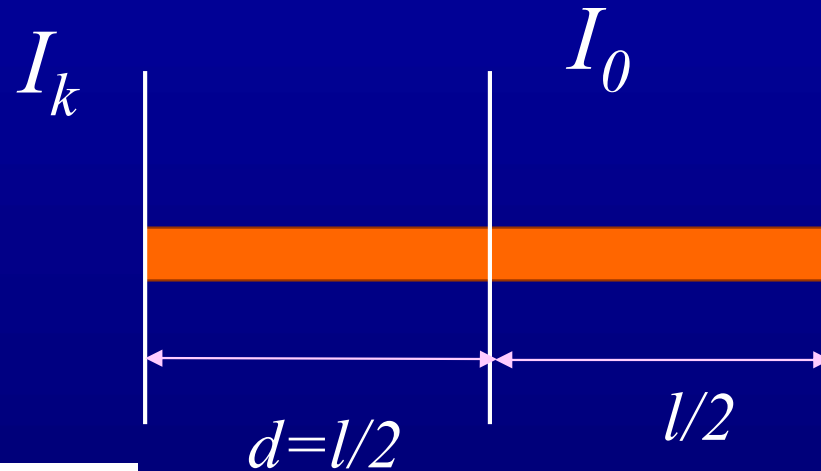
Wektor określający położenie środka masy w układzie o początku umieszczonym w środku masy ma wszystkie składowe równe 0

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$$

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm$$

$$I = \int r_{0\perp}^2 dm + d^2 \int dm = I_0 + m d^2$$

Przykład zastosowania Twierdzenia Steinera –moment bezwładności pręta o masie m względem osi przechodzącej przez koniec pręta

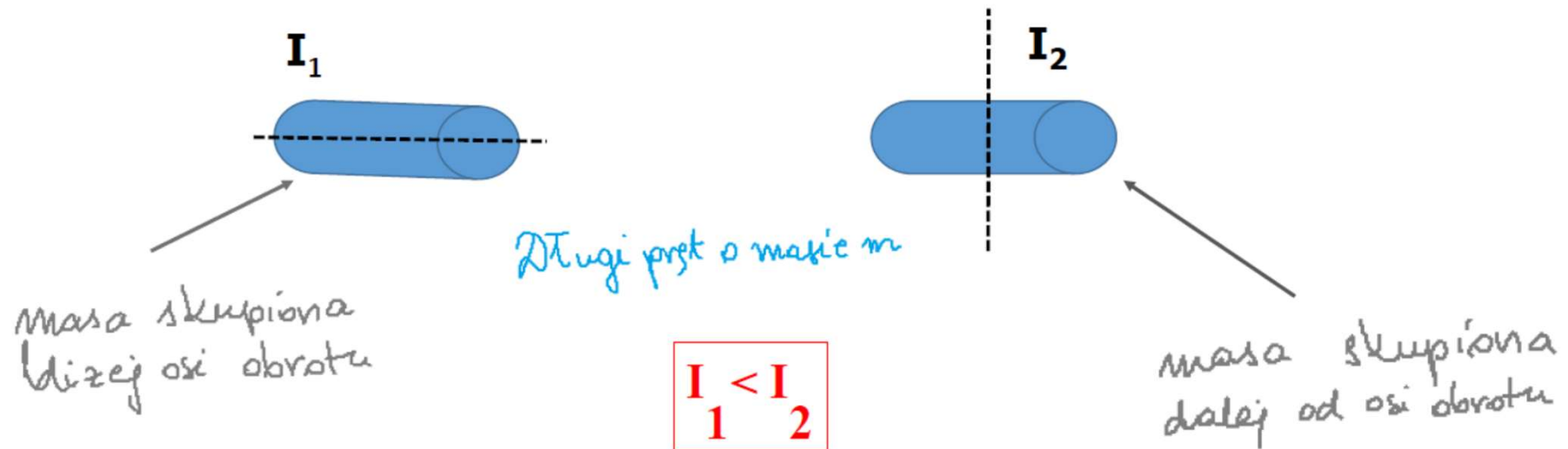


$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_k = I_0 + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

Moment bezwładności zależy nie tylko od masy ciała ale także od rozkładu masy wokół osi obrotu. Moment bryły, której masa jest skupiona bliżej osi obrotu jest mniejsza niż tej w której masa ta jest oddalona dalej od tej osi

Moment bezwładności zależy od masy ciała, ale i od **rozkładu masy wokół osi** obrotu.



Rzut momentu pędu bryły na oś obrotu

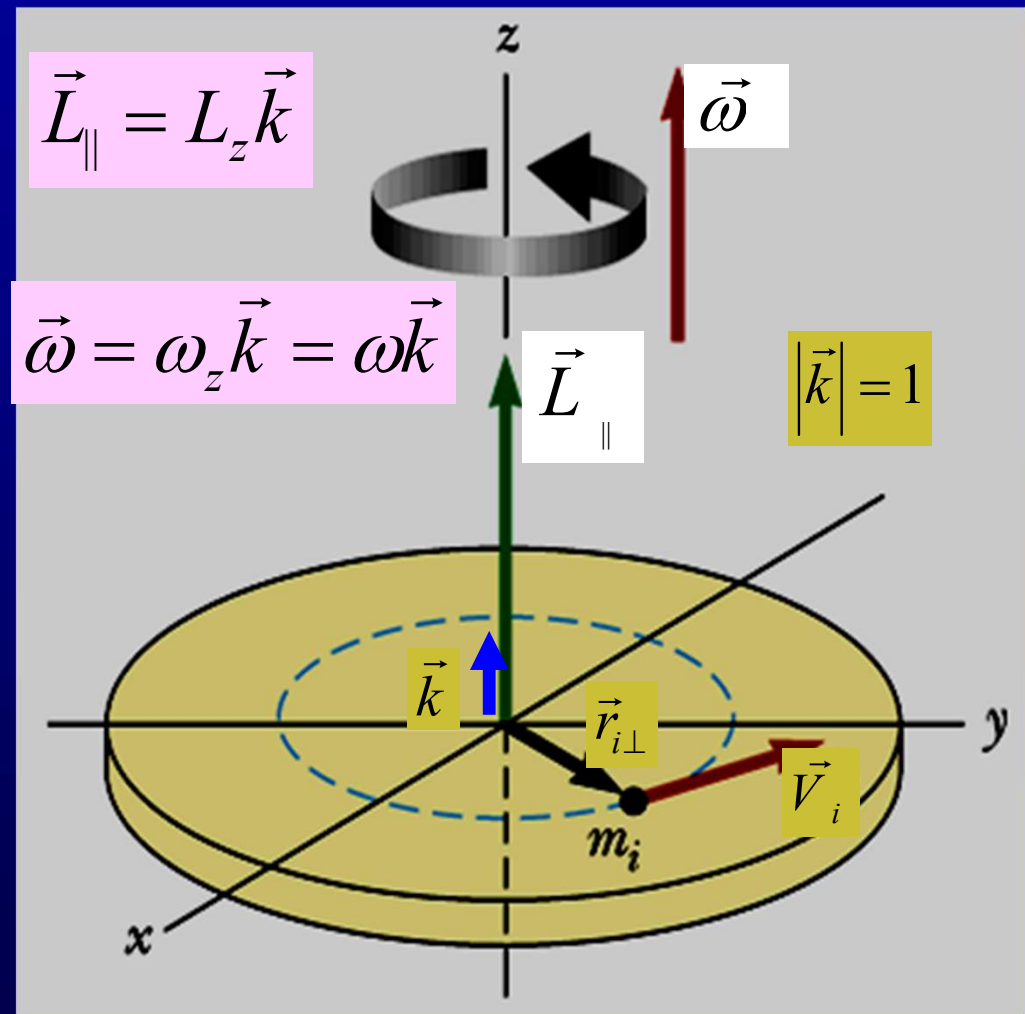
$$\vec{L}_{\parallel} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$$\vec{L}_{\parallel} = I \vec{\omega}$$

$$L_z = I \omega$$

Rzut ten nie zależy od wyboru punktu na osi obrotu względem którego go określamy



Związek rzutu momentu pędu na oś obrotu z rzutem wypadkowego momentu siły na oś obrotu Oz

$$\vec{\tau}_w = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$$\vec{\tau}_{w\parallel} = \frac{d\vec{L}_{\parallel}}{dt}$$

$$\tau_{wz} = \frac{dL_z}{dt}$$

Zakładamy iż oś obrotu Oz musi być nieruchoma w pewnym układzie inercyjnym lub ma ustalony kierunek i przechodzić przez środek masy bryły (lub układu złożonego z obracających się brył). Rzuty momentu pędu bryły (układu brył) i wypadkowego momentu siły na oś obrotu określamy względem dowolnego punktu leżącego na tej osi gdyż nie zależą one od wyboru punktu na osi obrotu, względem którego je określamy. Do wypadkowego momentu zwykle nie dają wkładu siły wewnętrzne działające między punktami materialnymi układu. Moment bezwładności układu złożonego z kilku brył może ulegać zmianie w trakcie ruchu.

Zasada zachowania momentu pędu w przypadku ruchu obrotowego

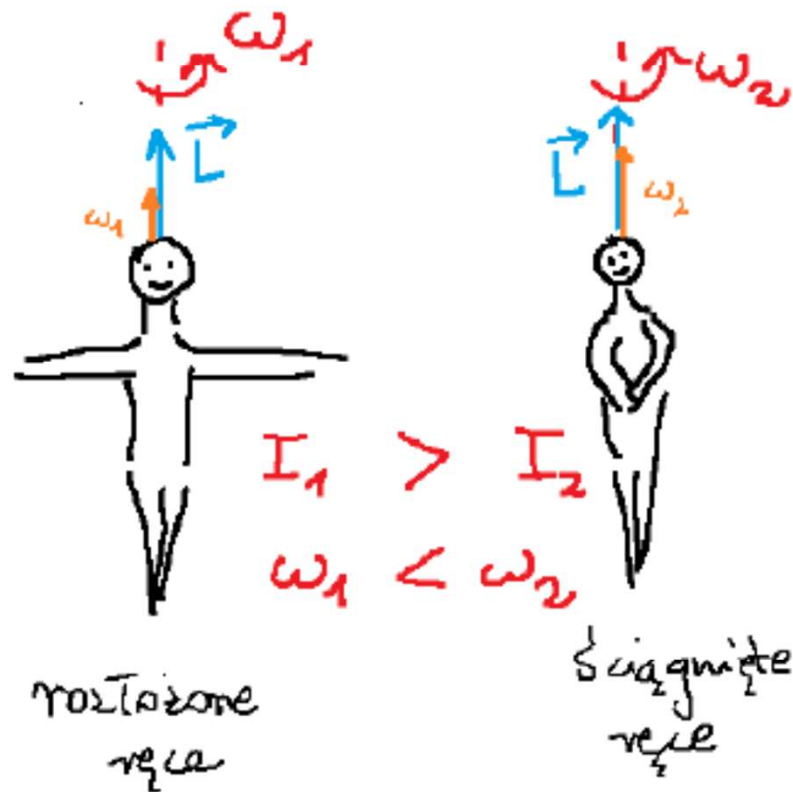
$$\vec{\tau}_{w\parallel} = 0 \rightarrow \vec{L}_{\parallel} = \text{const}$$

$$\tau_{wz} = 0 \rightarrow L_z = \text{const}$$

Jeżeli rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu jest równy zeru to rzut momentu pędu bryły na tą oś jest zachowany

Zasada zachowania momentu pędu-przykłady

Łyżwiarka wykonująca piruet:



$$L = \text{const.}$$

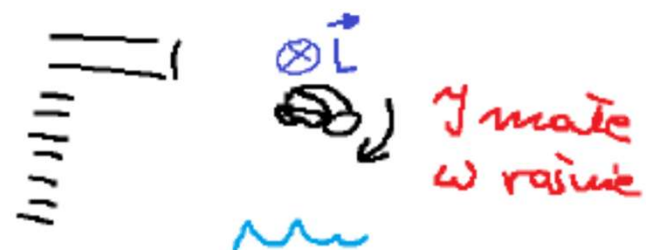
$$I\omega = \text{const}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Przyciągając ramiona do siebie łyżwiarka zmniejsza swój moment bezwładności. Skoro moment pędu łyżwiarki nie może się zmienić to jej prędkość kątową musi.

Zasada zachowania momentu pędu-przykłady

Skok do wody z wieży / trampoliny

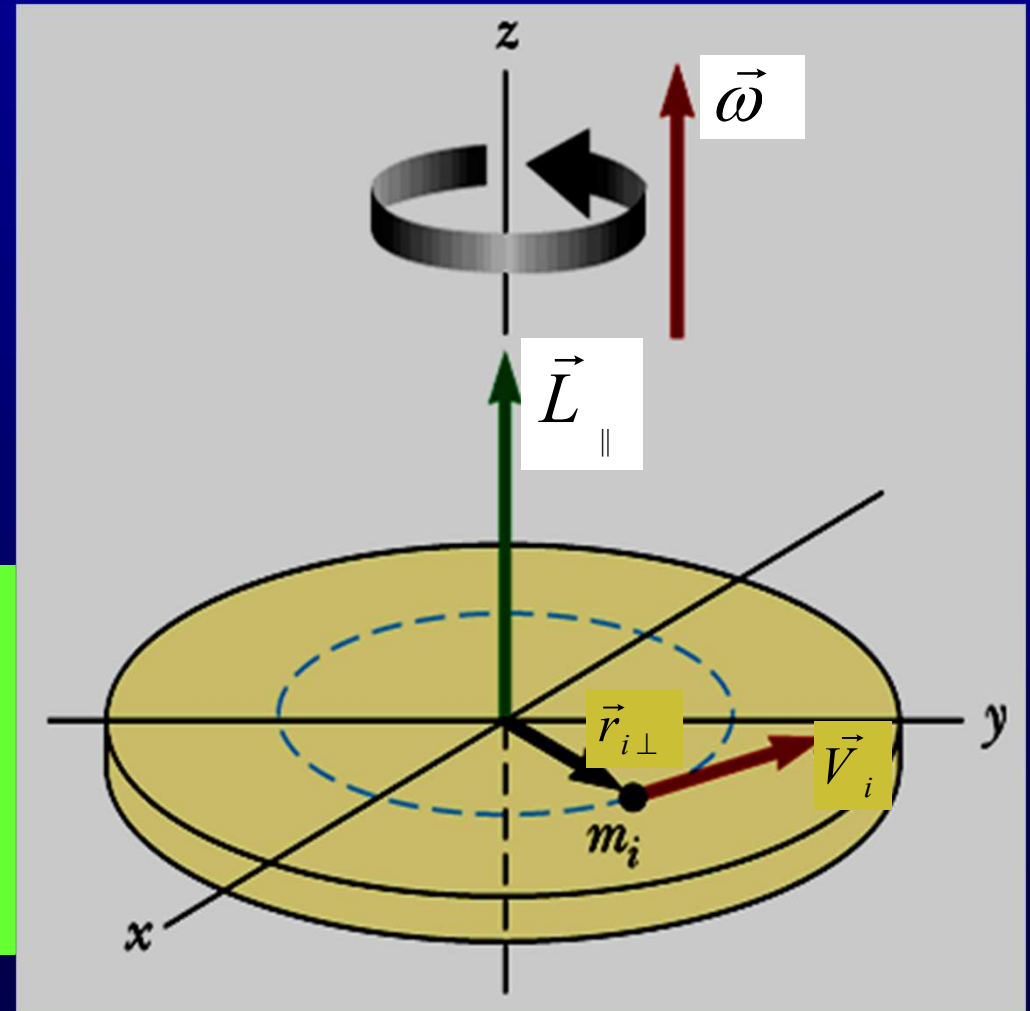


Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Jest ona równa sumie energii kinetycznych wszystkich punktów materialnych tworzących bryłę bryły

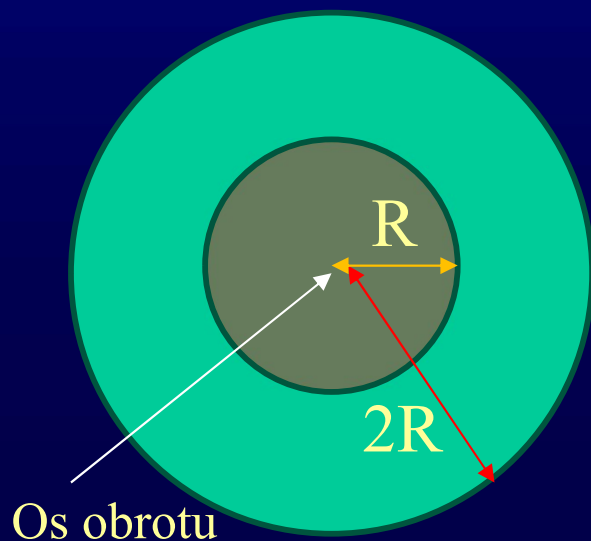
$$|\vec{V}_i| = |\vec{r}_{i\perp}| |\vec{\omega}|$$

$$\begin{aligned} E_{kin,obr} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$



Pyt. Dwa walce obracają się wokół swoich osi symetrii, przy czym wartość prędkości kątowej pierwszego walca jest dwukrotnie większa od prędkości kątowej drugiego walca. Wiadomo ponadto iż energie kinetyczne ruchu obrotowego obu walców są jednakowe. Które z poniższych twierdzeń są prawdziwe?

- a) Wartość momentu bezwładności względem osi obrotu w przypadku 1 walca jest czterokrotnie mniejsza niż w przypadku drugiego walca.
- b) Wartość momentu bezwładności względem osi obrotu w przypadku 1 walca jest dwukrotnie mniejsza niż w przypadku drugiego walca.
- c) Wartości momentów bezwładności względem osi obrotów w przypadku obu walców są jednakowe.
- d) Wartość rzutu momentu pędu pierwszego walca na oś obrotu jest dwukrotnie większa niż drugiego.
- e) Wartość rzutu momentu pędu pierwszego walca na oś obrotu jest dwukrotnie mniejsza niż drugiego.
- f) Wartość rzutu momentu pędu na oś obrotu jest taka sama w przypadku obu walców.



Odp. Ze wzoru $E_{kin,obr} = \frac{1}{2} I \omega^2$ wynika iż moment bezwładności pierwszego walca jest 4-krotnie mniejszy niż drugiego > poprawne stwierdzenie a)

Dodatkowo uwzględniając wzór $L_z = I \omega$ widać iż rzut momentu pędu pierwszego walca na oś obrotu jest dwukrotnie mniejszy niż drugiego
→ poprawne stwierdzenie e

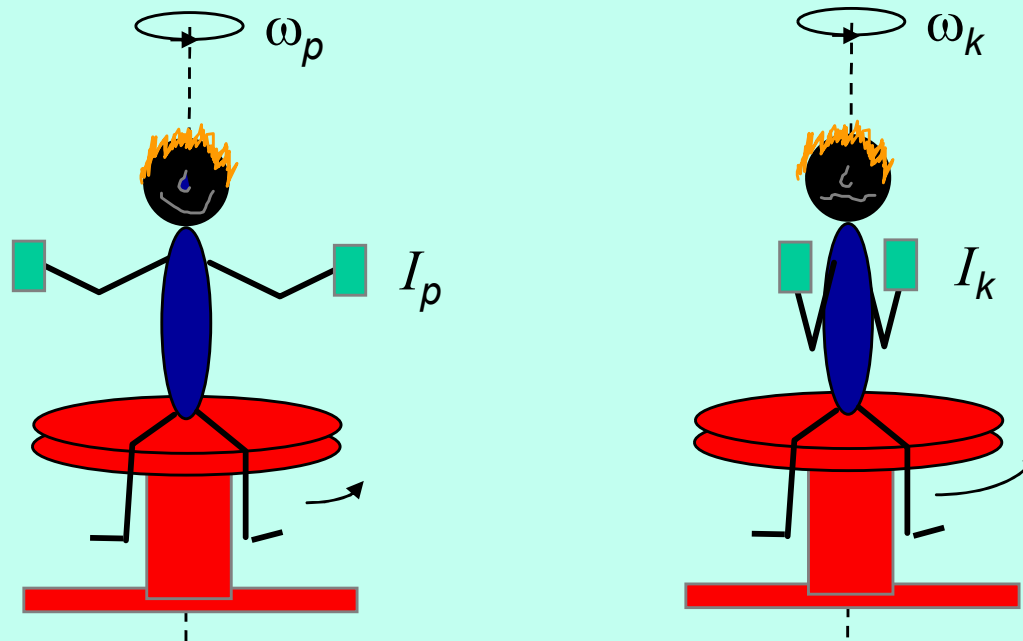
Przykład

Początkowy moment bezwładności całego układu I_p , a
prędkość kątowna układu ω_p

końcowy moment bezwładności I_k .

Jaka jest prędkość kątowna układu ω_k ?

Czy energia kinetyczna układu ulegała zmianie?



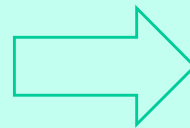
Rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu równy zero

- **Rzut moment pędu na oś obrotu jest zachowany**

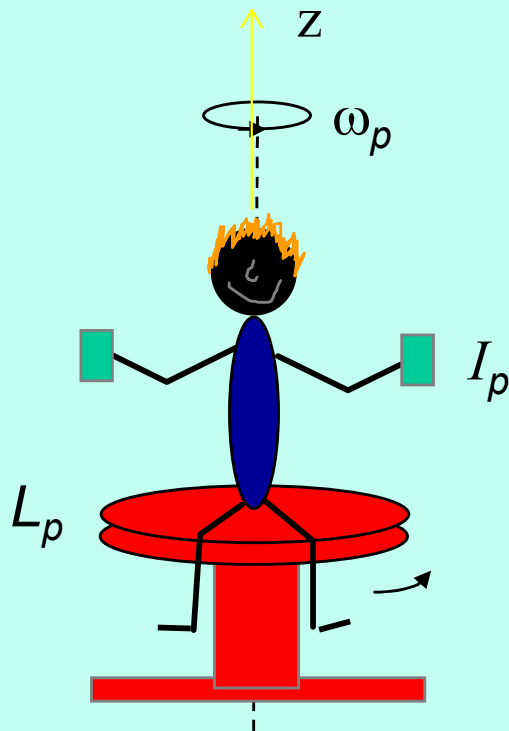
- $L_{kz} = L_{pz}$

- początkowy: $L_{pz} = I_p \omega_p$

- końcowy: $L_{kz} = I_k \omega_k$



$$\omega_k = \omega_p \frac{I_p}{I_k}$$



$$I_k < I_p$$

$$\omega_k > \omega_p$$

Wzrostowi prędkości kątowej towarzyszy w omawianym przypadku wzrost energii kinetycznej układu

$$E_{kin,p} = \frac{I_p \omega_p^2}{2}$$

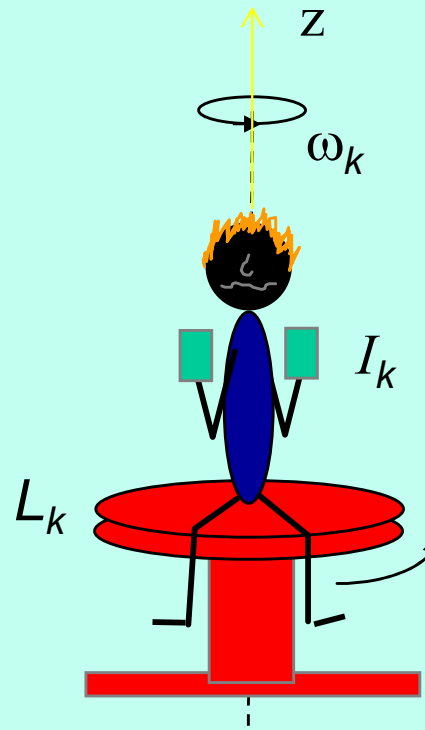
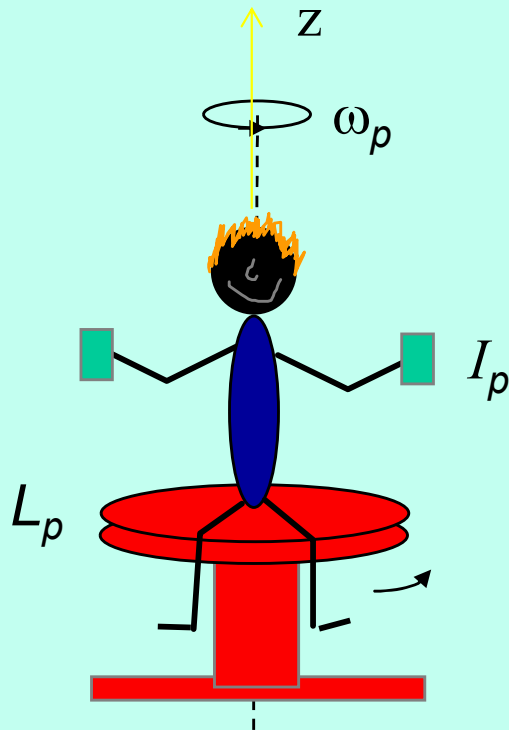
$$E_{kin,k} = \frac{I_k \omega_k^2}{2}$$

$$\omega_k = \omega_p \frac{I_p}{I_k}$$

$$E_{kin,k} = \frac{I_p \omega_p^2}{2} \frac{I_p}{I_k}$$

$$I_k < I_p$$

$$E_{kin,k} > E_{kin,p}$$



Bryła w polu siły ciężkości

Jeśli na bryłę działa siła ciężkości to można przyjąć iż jest ona przyłożona do środka ciężkości bryły oraz ma wartość równą

$$F_c = mg$$

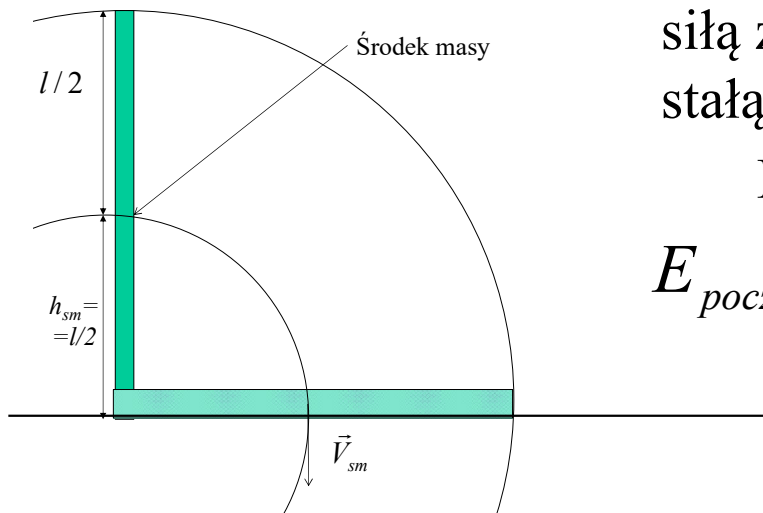
gdzie m -masa bryły , g - wartość przyspieszenia ziemskiego co możemy uwzględnić licząc wypadkowy moment siły działający na bryłę

Energia potencjalna bryły w polu siły ciężkości jest równa $E_{pot} = mgh$ gdzie h to wysokość środka ciężkości nad poziomem odniesienia
Gdy $g=const$ w obszarze bryły to środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy.

Jeżeli na bryłę działa tylko siła ciężkości będąca siłą zachowawczą to suma energii kinetycznej i potencjalnej bryły w polu siły ciężkości nie ulega zmianie w czasie. Wniosek pozostaje słuszny także w przypadku występowania innych sił nie wykonujących pracy w trakcie jej ruchu.

Przykład. Pionowy pręt o wysokości l i masie m ustawiono pionowo na ziemi. Po podpiłowaniu go przy podstawie pada on na ziemię, przy czym dolny koniec pręta pozostaje w spoczynku. W momencie upadku pręta na ziemię określić jego energie kinetyczną oraz szybkość punktu leżącego w środku pręta.

Dane l, m, g



Szukane $E_{kin,konc}, V_{sm}$

Jedyną siłą wykonującą pracę jest siła ciężkości. Jest ona siłą zachowawczą. Całkowita energia pręta jest wielkością stałą

Energia pręta w pozycji pionowej

$$E_{pocz} = E_{kin,pocz} + E_{pot,pocz} = E_{pot,pocz} = mgh_{sm} = mg \frac{l}{2}$$

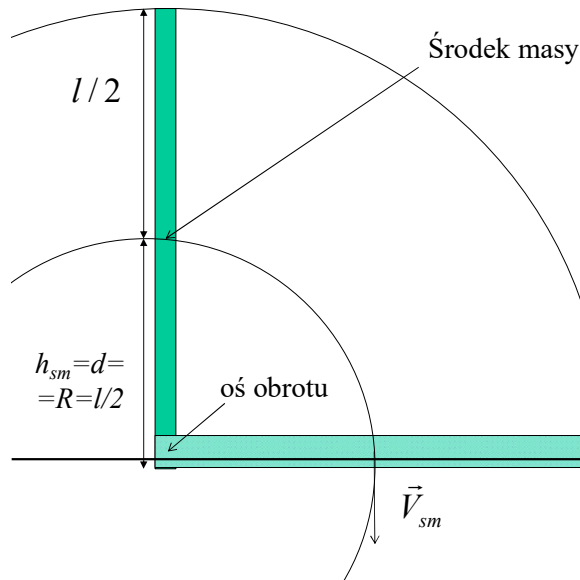
$$E_{kin,pocz} = 0$$

$$E_{pot,konc} = 0$$

Energia pręta tuż przed jego upadkiem na ziemi $E_{konc} = E_{kin,konc} + E_{pot,konc} = E_{kin,konc}$

$$E_{pocz} = E_{konc} \Rightarrow mg \frac{l}{2} = E_{kin,konc}$$

Powiązanie energii kinetycznej z prędkością kątową ω określoną w chwili tuż przed upadkiem pręta na ziemię



$$E_{kin,konc} = \frac{I\omega^2}{2}$$

gdzie moment I – moment bezwładności pręta względem osi obrotu

Z twierdzenia Steinera

$$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{12}\right) = \frac{1}{3}ml^2$$

A zatem

$$E_{kin,konc} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

Powiązanie prędkości kątowej z szybkością środka masy pręta poruszającego

się po okręgu o promieniu $R = l/2$ $V_{sm} = R\omega = \frac{1}{2}l\omega \Rightarrow \omega = \frac{2V_{sm}}{l}$

A zatem $E_{kin,konc} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2 \frac{4V_{sm}^2}{l^2} = \frac{2}{3}mV_{sm}^2$

Uwzględniając to iż $E_{kin,konc} = mg\frac{l}{2}$ mamy

$$mg\frac{l}{2} = \frac{2}{3}mV_{sm}^2 \Rightarrow V_{sm} = \sqrt{\frac{3}{4}gl} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

II zasada dynamiki ruchu obrotowego

bryły sztywnej (o stałym momencie bezwładności) wokół osi obrotu nieruchomej (w pewnym układzie inercyjnym) lub osi o ustalonej orientacji w przestrzeni przechodzącej przez środek masy

$$\tau_{wz} = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \stackrel{I=const}{=} I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k} = \varepsilon \vec{k}$$

$$L_z = I\omega_z = I\omega$$

$$\tau_{wz} = I\varepsilon \Leftrightarrow \vec{\tau}_{w\parallel} = I\vec{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

I -stały moment bezwładności względem osi obrotu,

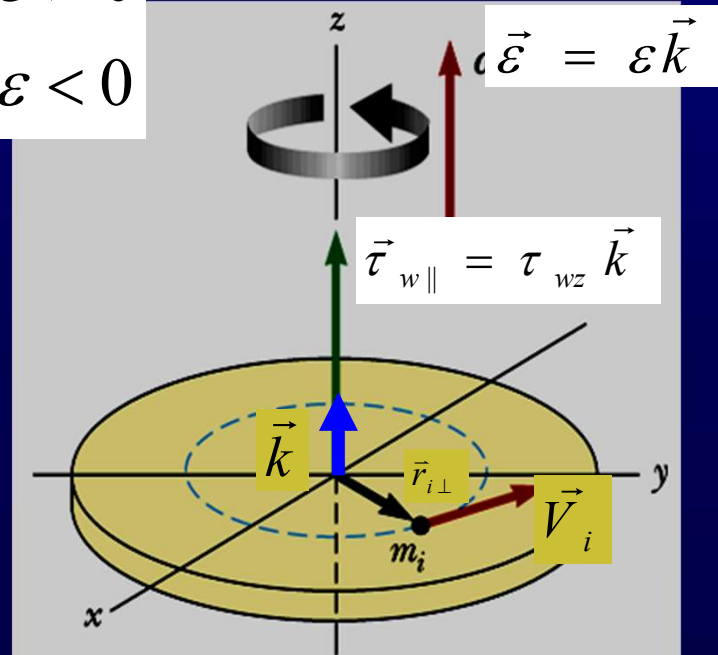
ε -przyspieszenie kątowe,

τ_{wz} –składowa z-towa wypadkowego momentu siły (oś Oz –oś obrotu) określonego względem dowolnego punktu na osi obrotu

$$\tau_{wz} > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$

$$\tau_{wz} < 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$

Wypadkowy moment siły działający na bryłę nadaje jej przyspieszenie kątowe wprost proporcjonalne do wypadkowego momentu siły i odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności



Im większy moment bezwładności bryły tym trudniej jest ją wprowadzić w ruch obrotowy i zatrzymać gdy bryła się obraca

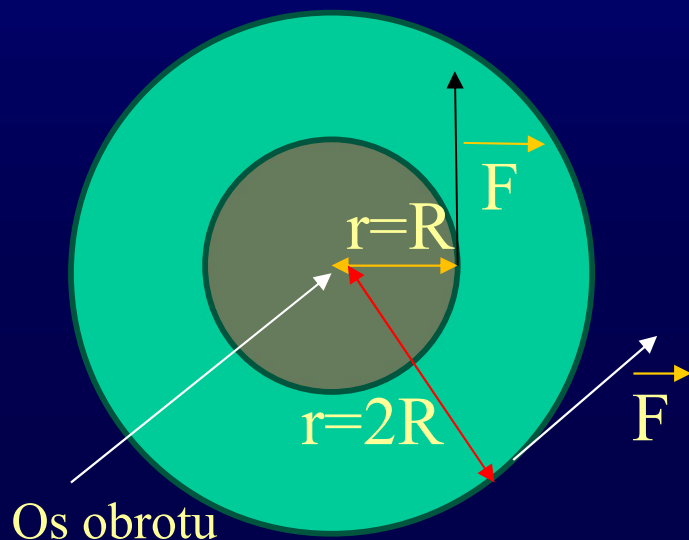
Pyt. Dwa walce o jednakowych masach mogą poruszać się wokół osi będących osiami symetrii tych walców. Do obu walców przyłożono jednakową siłę w punktach leżących na powierzchni bocznej walców. Siła ta ma kierunek styczny do powierzchni bocznej walca i prostopadły do osi symetrii walców. Promień koła leżącego w podstawie pierwszego walca jest dwukrotnie większy niż promień koła leżącego w podstawie drugiego walca. Co można powiedzieć o wartości przyspieszenia kątownego z jaką poruszają się te walce?

- a) Przyspieszenie kątowe pierwszego walca jest czterokrotnie mniejsze niż drugiego.
- b) Przyspieszenie kątowe pierwszego walca jest dwukrotnie mniejsze niż drugiego.
- c) Przyspieszenie kątowe obu walców jest jednakowe.
- d) Przyspieszenie kątowe pierwszego walca jest dwukrotnie większe niż drugiego.

Zaznaczyć jedno prawdziwe stwierdzenie spośród podanych powyżej

Odp. Wartość rzutu wypadkowego momentu siły na oś obrotu równa długości momentu przyłożonej siły jest równa $\tau_{wz} = rF \sin(90^\circ) = rF$. Jest ona dwukrotnie większa w przypadku pierwszego walca o większym promieniu. Moment bezwładności walca względem osi obrotu równy $I = 0.5 \cdot mr^2$ jest 4-krotnie większy w przypadku pierwszego walca o większym promieniu.

Przyspieszenie kątowe równe $\varepsilon = \frac{\tau_{wz}}{I}$ jest więc dwukrotnie mniejsze w przypadku pierwszego walca o większym promieniu. Poprawna odpowiedź to odpowiedź b



Ruch postępowy i obrotowy

ruch postępowy

ruch obrotowy

droga liniowa

$$s$$

droga kąтова

$$\Delta\varphi$$

prędkość

$$\vec{V}$$

prędkość kąтова

$$\vec{\omega}$$

przyspieszenie

$$\vec{a}$$

przyspieszenie kątowe

$$\vec{\varepsilon}$$

masa

$$m$$

moment bezwładności

$$I$$

Pęd

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

moment pędu

$$\vec{L}_{||} = I\vec{\omega}$$

siła wypadkowa

$$\vec{F}_w = m\vec{a}$$

moment siły

$$\vec{\tau}_{w||} = I\vec{\varepsilon}$$

energia kinetyczna

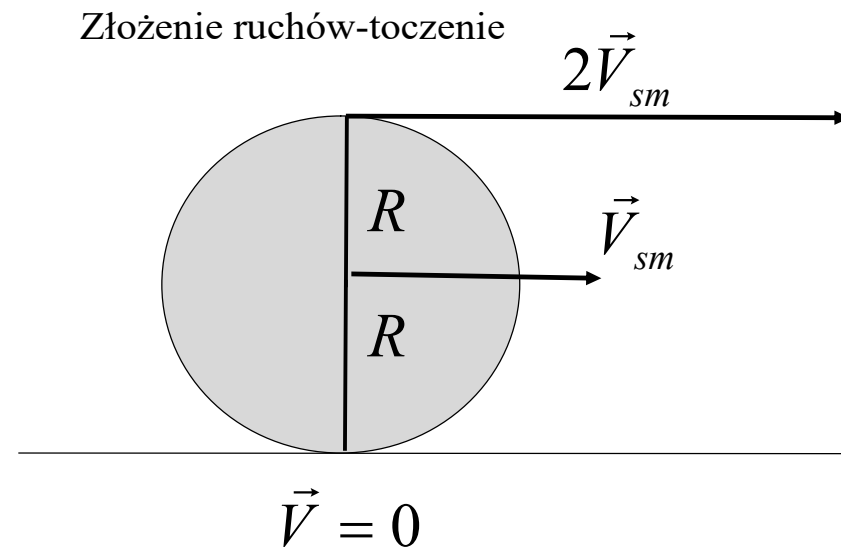
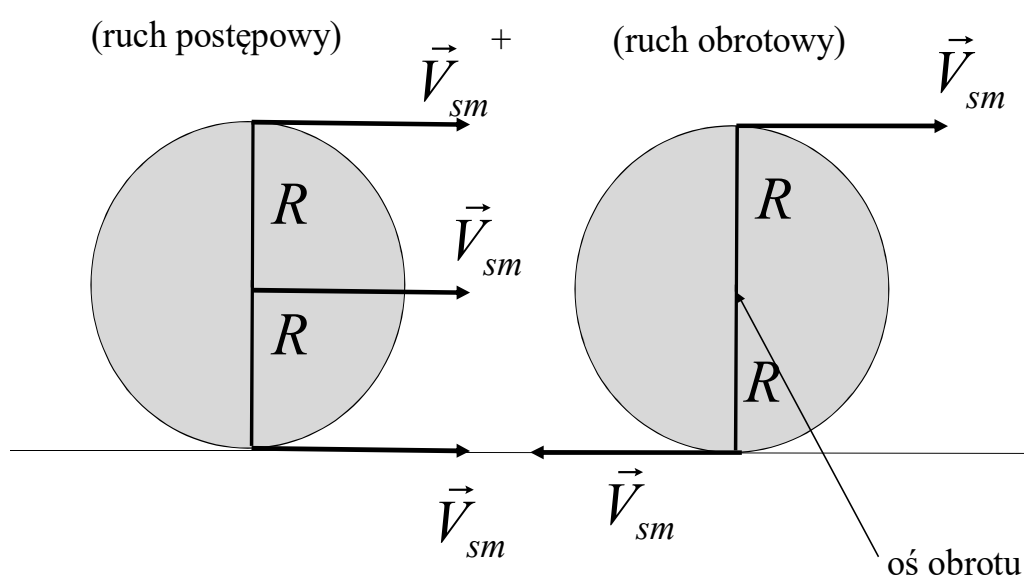
$$E = \frac{1}{2} m V^2$$

energia kinetyczna

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

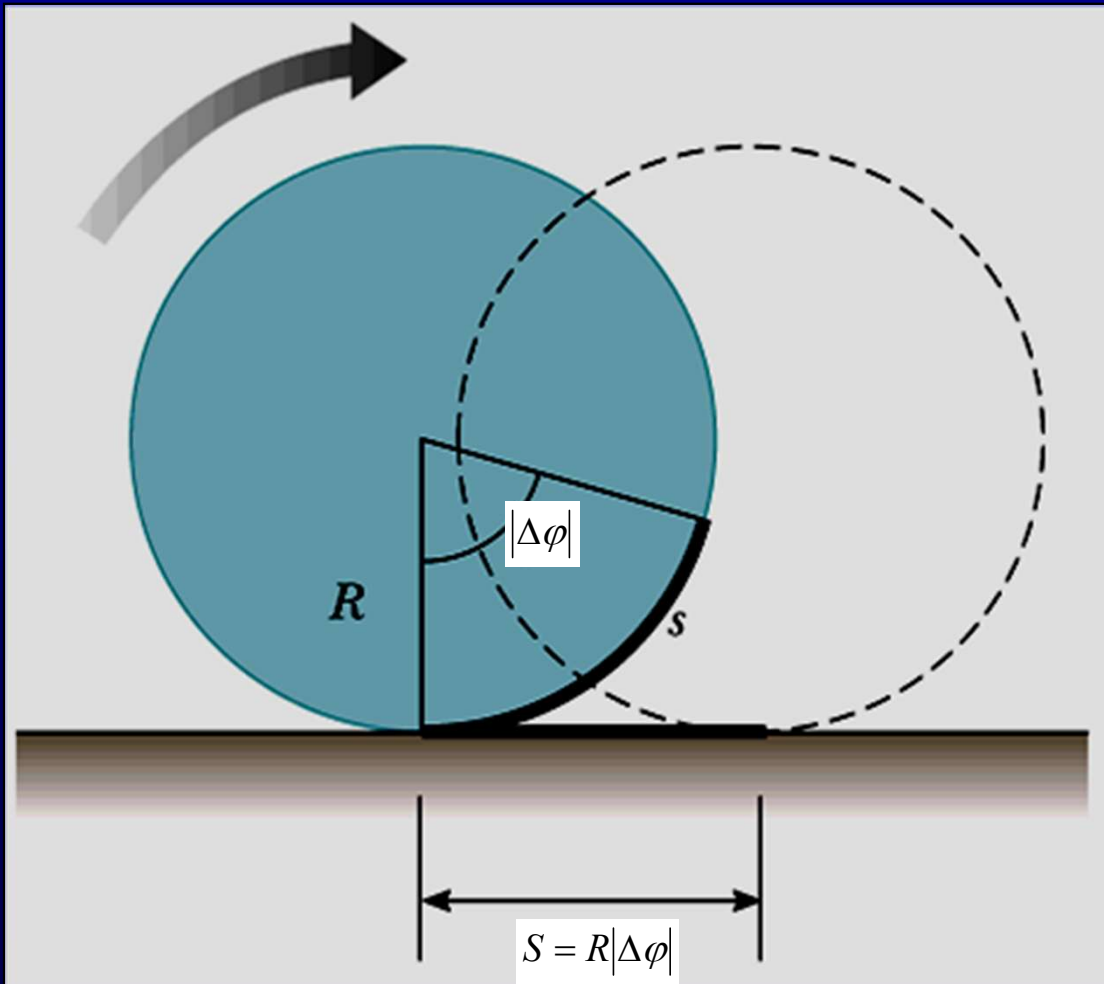
Toczenie bez poślizgu jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej

W ogólnym przypadku ruch bryły sztywnej może być złożeniem ruchu obrotowego i postępowego. Przykładem takiego ruchu może być np. **toczenie bez poślizgu bryły w kształcie np. koła, walca czy obręczy** będące złożeniem ruchu postępowego z prędkością równą prędkości środka masy bryły $\vec{V}_{sm}$ i obrotowego wokół osi przechodzącej przez ruchomy środek masy z prędkością kątową o wartości ω taką iż $|\omega| = \frac{V_{sm}}{R}$



Związek prędkości kątowej z szybkością środka masy w przypadku toczenia bez poślizgu

Droga pokonana przez punkt leżący w środku masy bryły w układzie nieruchomym jest równa drodze punktu poruszającego się po torze stykającym się z podłożem w układzie związanym z środkiem bryły (koła, walca, kuli)

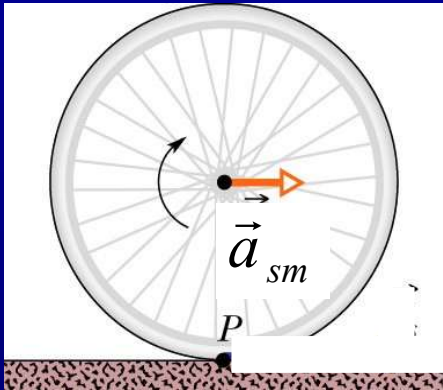


$$\begin{aligned} V_{sm} &= \frac{dS}{dt} = \frac{d(R|\Delta\varphi|)}{dt} \\ &= R \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = R|\vec{\omega}| \end{aligned}$$

Związek przyspieszenia kąowego z przyspieszeniem środka masy

Jeśli bryła toczy się bez poślizgu to środek masy bryły porusza się z szybkością

$$V_{sm} = R|\vec{\omega}|$$



Gdy do bryły przyłożymy zewnętrzną siłę to środek masy bryły może poruszać się z przyspieszeniem $\vec{a}_{sm}$. W przypadku toczenia się bez poślizgu przyspieszenie to można powiązać z przyspieszeniem kąowym w ruchu obrotowym.

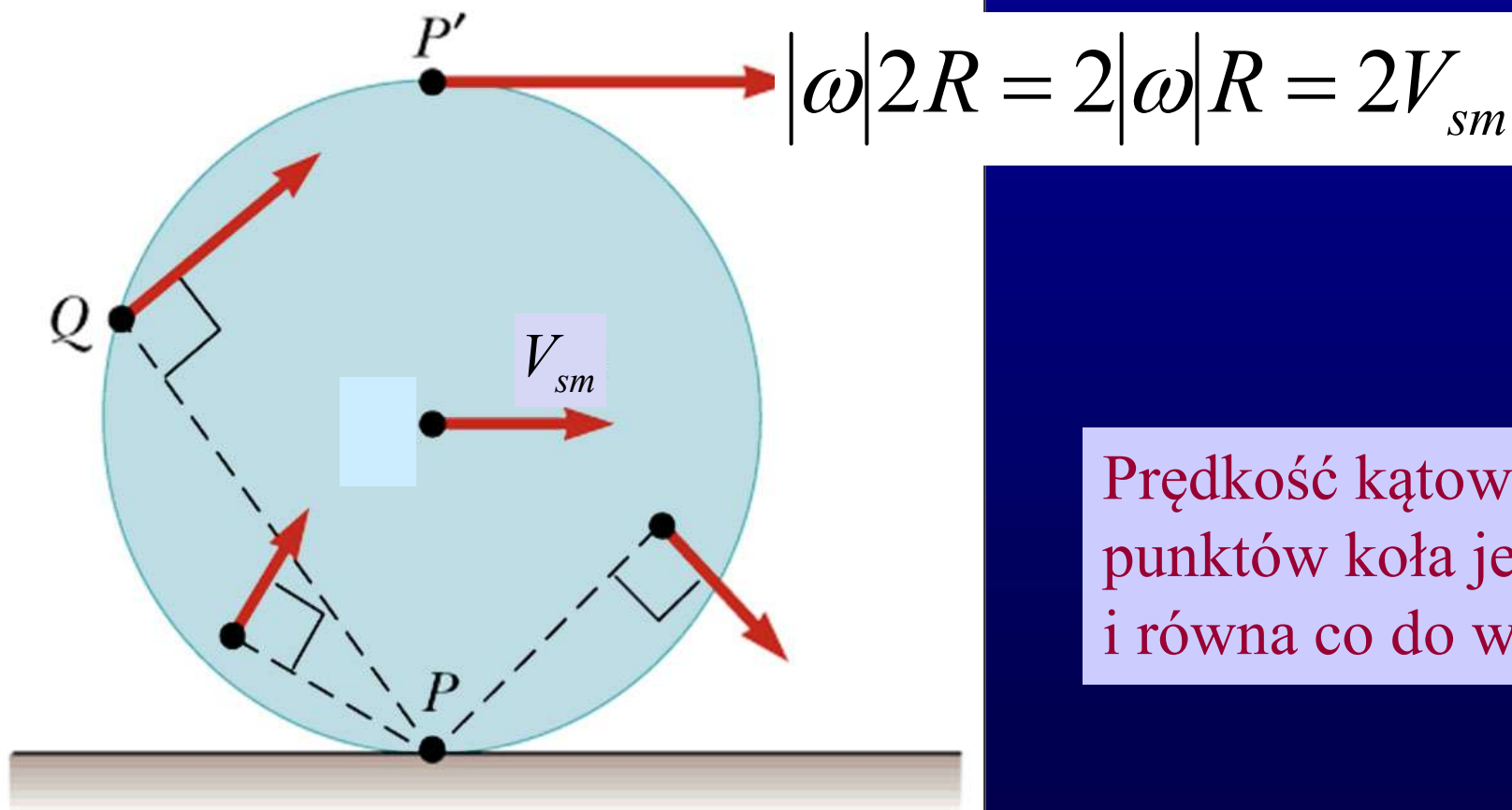
$$|\vec{a}_{sm}| = \left| \frac{dV_{sm}}{dt} \right| = \left| \frac{d(R|\vec{\omega}|)}{dt} \right| = R \left| \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right| = R|\vec{\epsilon}|$$

Ruch ciała z określonym powyżej przyspieszeniem kąowym bez poślizgu wymaga by rzut wypadkowego momentu siły na oś obrotu był równy co do wartości

Przyspieszenie
kątowne

$$|\vec{\tau}_w| = I|\vec{\epsilon}|$$

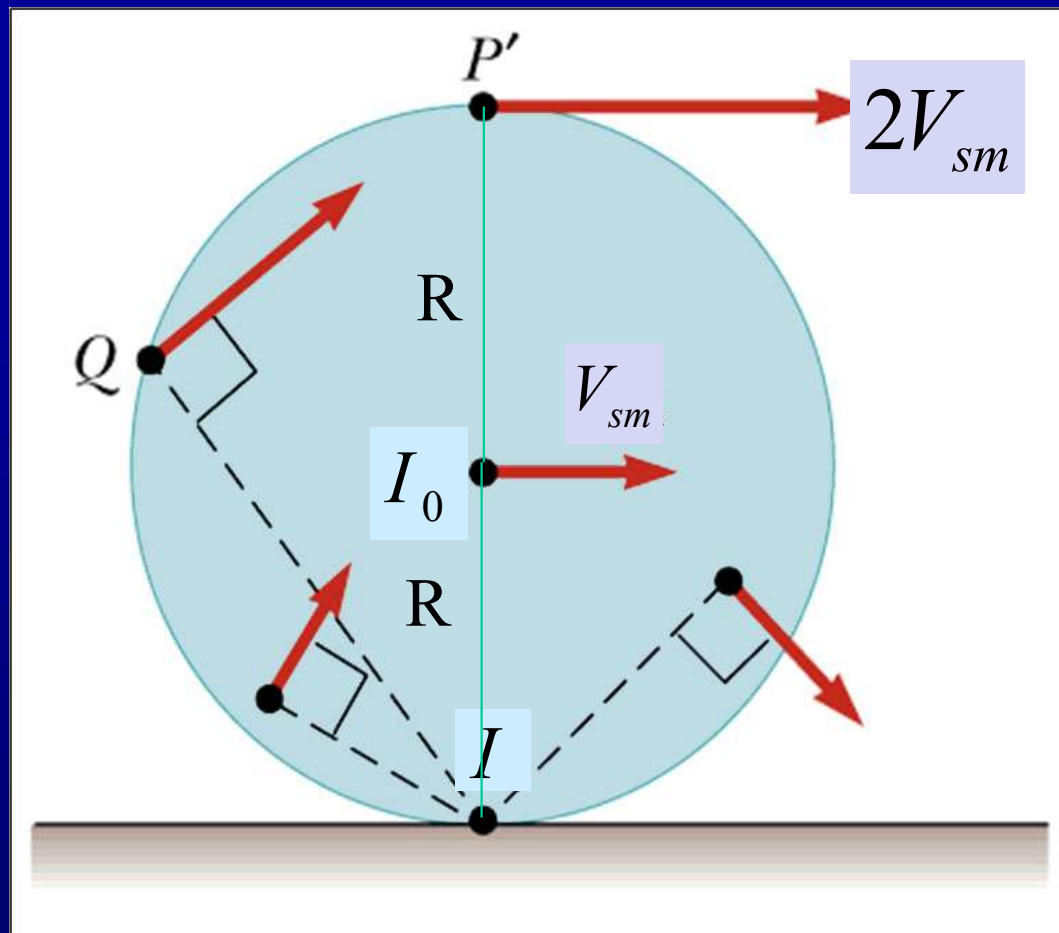
Toczenie można też opisać jako ruch ściśle obrotowy wokół osi obrotu leżącej na styku bryły z podłożem. Widać iż szybkość poszczególnych punktów bryły jest inna i zależy od położenia punktu



Prędkość kątowna wszystkich punktów koła jest taka sama i równa co do wartości ω .

Szybkość punktu P jest równa zeru, P' jest równa $2V_{sm}$

M S Karlapper



Z Tw. Steinera

$$I = I_0 + mR^2$$

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_0 + mR^2) \cdot \omega^2 = \\ &= \frac{I_0 \omega^2}{2} + \frac{m}{2} (R\omega)^2 = \frac{I_0 \omega^2}{2} + \frac{m V_{sm}^2}{2} \end{aligned}$$

Widać iż w przypadku toczenia bez poślizgu energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznej w ruchu postępowym zachodzącym z prędkością środka masy i energii w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy

Energia kinetyczna bryły sztywnej podlegającej jednocześnie ruchowi postępowemu i obrotowemu względem osi przechodzącej przez środek masy jest sumą energii w ruchu postępowym i obrotowym

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m V_{sm}^2 + \frac{1}{2} I_o \cdot \omega^2$$

energia kinetyczna
w ruchu postępowym

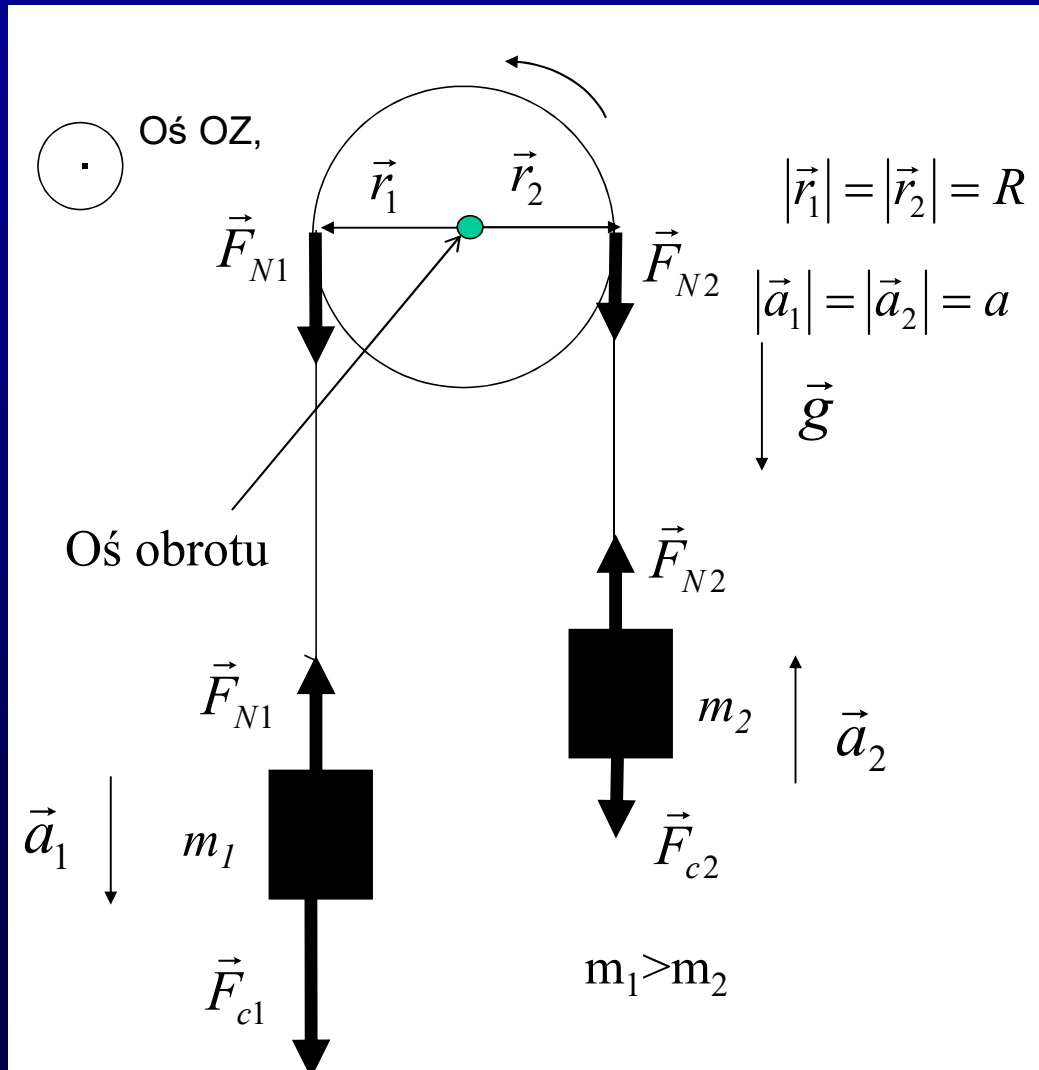
energia kinetyczna
w ruchu obrotowym

kwadrat szybkości środka masy bryły

I_o -moment
bezwładności
względem osi
obrotu
przechodzącej
przez środek
masy

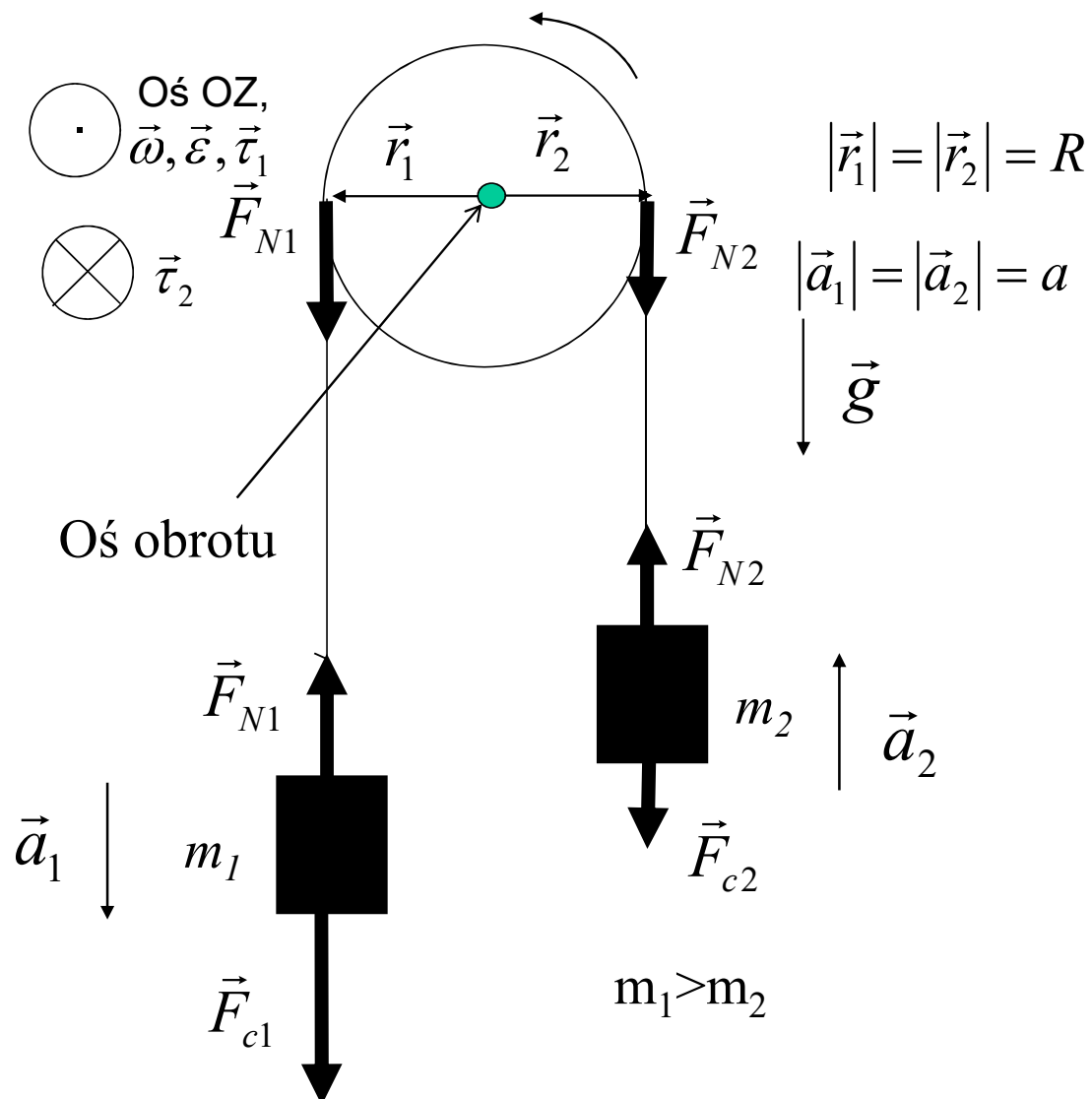
Przykłady (częściowo do samodzielnej analizy)

Przykład. Na końcach nieważkiej nici przerzuconej przez ruchomy krążek w kształcie walca o masie m i promieniu R zawieszono dwa klocki o masach m_1 i m_2 ($m_1 > m_2$). Nici nie ślizga się względem brzegu bloczka. Określić wartość przyspieszenia, z jakim poruszać się będą oba klocki.



Równanie ruchu obrotowego bloczka

$$I\varepsilon = \tau_z$$



$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{N1} \quad |\vec{\tau}_1| = RF_{N1}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{N2} \quad |\vec{\tau}_2| = RF_{N2}$$

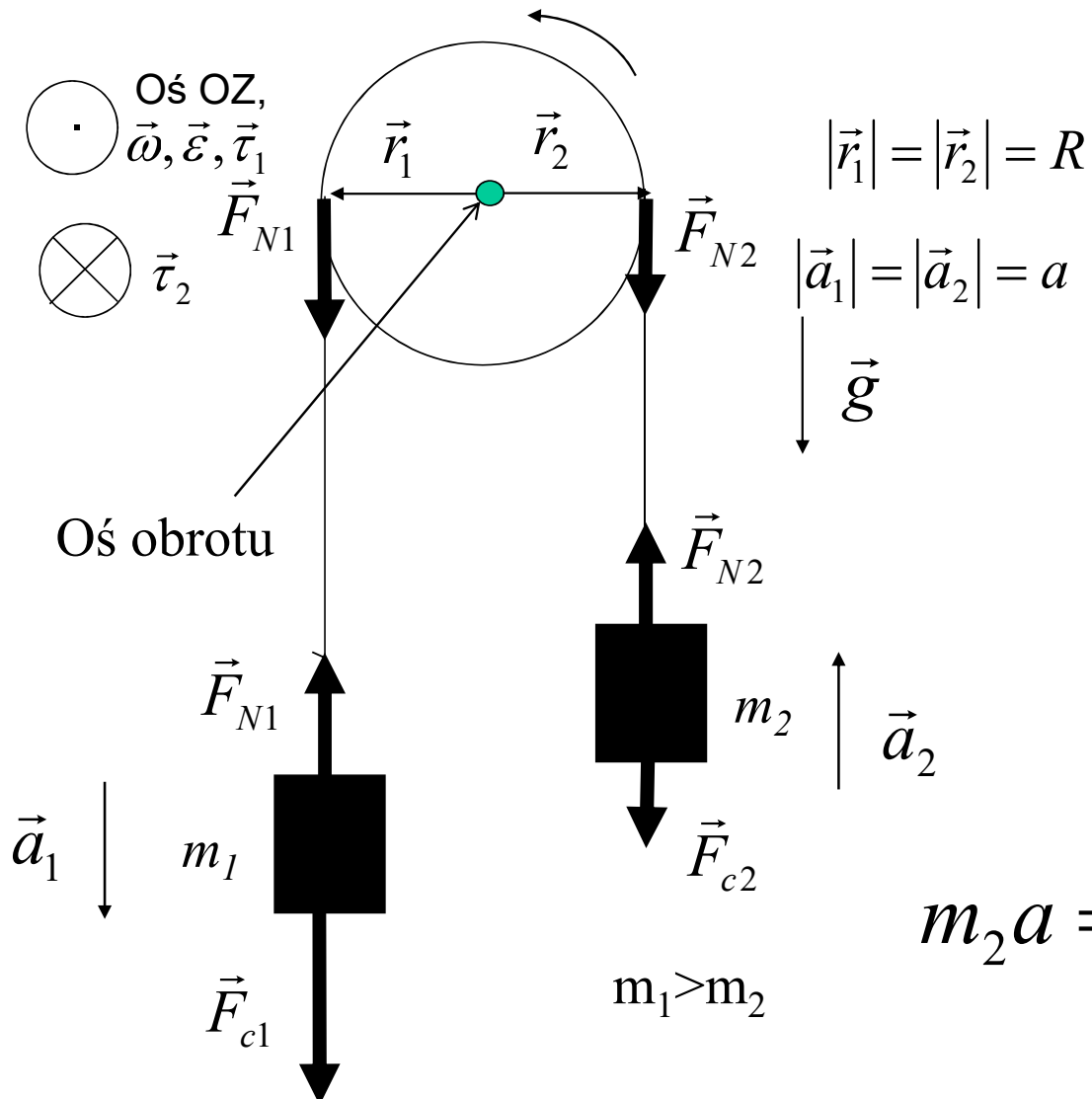
$$\tau_{1z} = |\vec{\tau}_1| = RF_{N1}$$

$$\tau_{2z} = -|\vec{\tau}_2| = -RF_{N2}$$

$$\tau_z = \tau_{1z} + \tau_{2z} = RF_{N1} - RF_{N2}$$

$$I\varepsilon = \tau_z = RF_{N1} - RF_{N2}$$

Równanie ruchu postępowego ciężarków



$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{N1}$$

$$m_1 a = F_{c1} - F_{N1} = m_1 g - F_{N1}$$

$$F_{N1} = m_1 g - m_1 a$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{c2} + \vec{F}_{N2}$$

$$m_2 a = -F_{c2} + F_{N2} = -m_2 g + F_{N2}$$

$$F_{N2} = m_2 g + m_2 a$$

$$\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{a}{R}$$

Nić nie ślizga się po
bloczku

$$I\varepsilon = \tau_z = RF_{N1} - RF_{N2}$$

$$F_{N1} = m_1g - m_1a$$

$$F_{N2} = m_2g + m_2a$$

$$I \frac{a}{R} = R(F_{N1} - F_{N2})$$

$$I \frac{a}{R^2} = m_1g - m_1a - m_2g - m_2a$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2} g$$

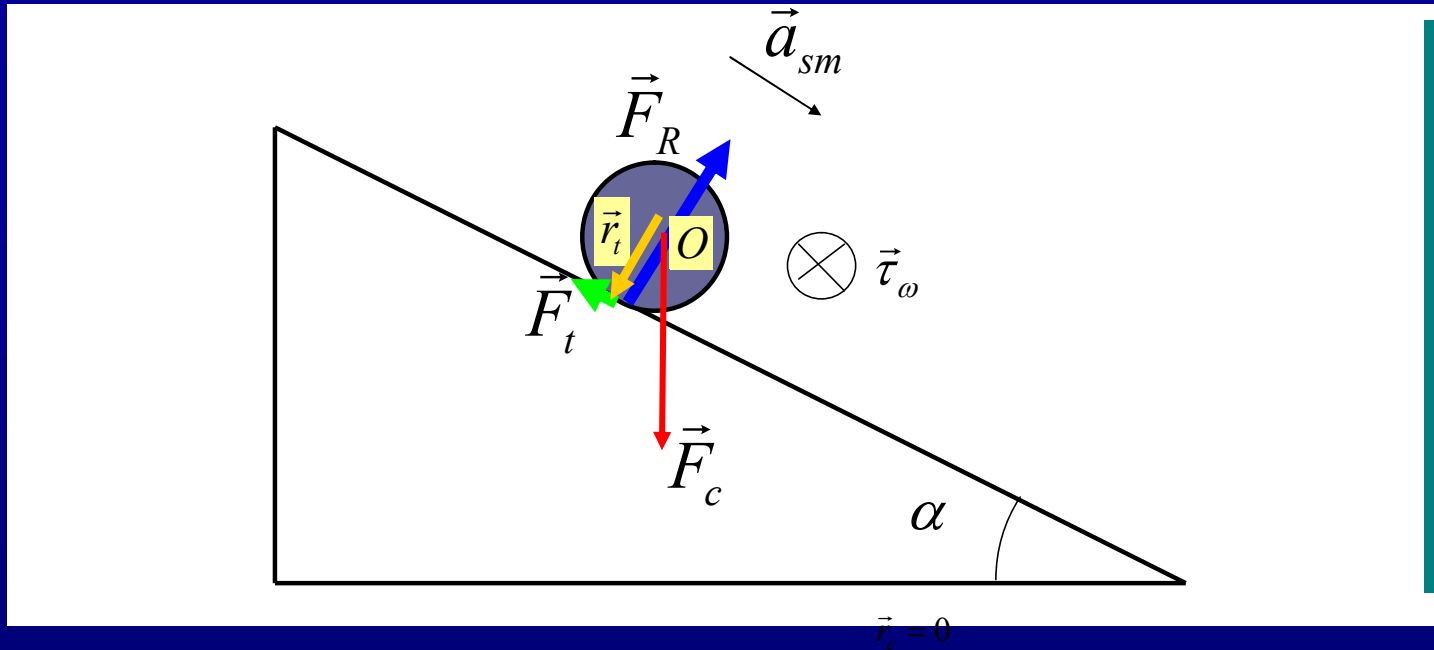
$$= \frac{m_1 - m_2}{\frac{\frac{1}{2}mR^2}{R^2} + m_1 + m_2} g = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g$$

$$F_{N1} < m_1g, F_{N2} > m_2g$$

$$F_{N1} = \frac{\frac{m}{2} + 2m_2}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} m_1g$$

$$F_{N2} = \frac{\frac{m}{2} + 2m_1}{\frac{m}{2} + m_1 + m_2} m_2g$$

Przykład Staczanie się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



Kula o promieniu R stacza się z równi o kącie nachylenia do poziomu α bez poślizgu. Znaleźć przyspieszenie liniowe środka masy kuli $a_{sm} = |\vec{a}_{sm}|$.

Określenie wypadkowego momentu siły względem środka kuli O leżącego na osi obrotu

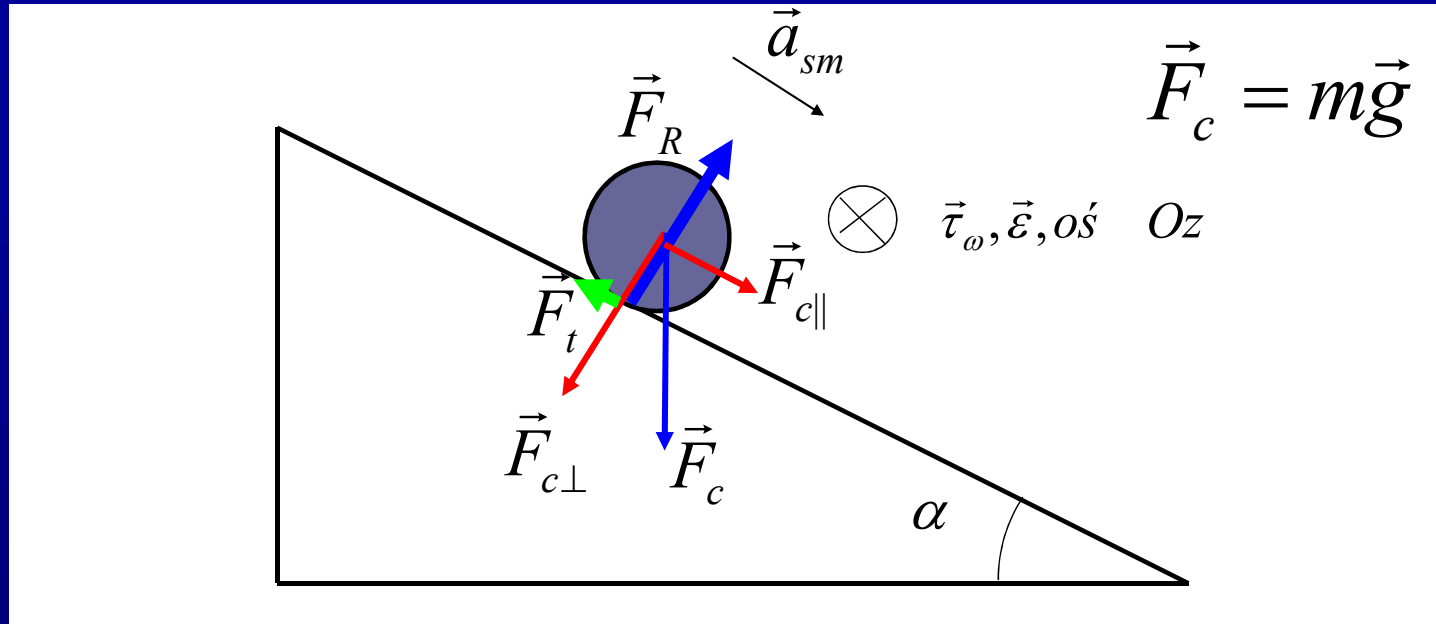
$$\vec{\tau}_w = \vec{\tau}_c + \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_t = \vec{\tau}_t$$

Moment siły ciężkości $\vec{\tau}_c = \vec{r}_c \times \vec{F}_c = 0$ gdyż $\vec{r}_c = 0$

Moment siły reakcji $\vec{\tau}_R = \vec{r}_R \times \vec{F}_R = 0$ gdyż $\vec{r}_R = \vec{r}_t \parallel -\vec{F}_R$

Wartość momentu siły tarcia $|\vec{\tau}_t| = |\vec{r}_t \times \vec{F}_t| = R F_t$ gdyż $|\vec{r}_t| = R, \vec{r}_t \perp \vec{F}_t$

Staczanie się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



Rozkład siły ciężkości na siłę prostopadłą do równi i siłę równoległą do zbocza

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{c\perp} + \vec{F}_{c\parallel}$$

Ruch postępowy

$$\vec{F}_w = m\vec{a}_{sm}$$

Ruch obrotowy

$$F_{c\parallel} - F_t = ma_{sm}$$

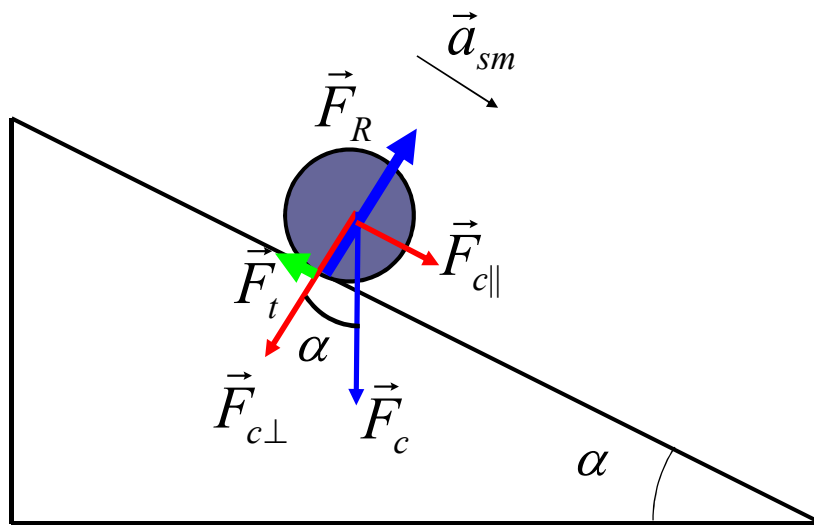
$$\epsilon = \frac{a_{sm}}{R}$$

$$\vec{\tau}_{w\parallel} = I_0 \vec{\epsilon} \Leftrightarrow \tau_{wz} = I_0 \epsilon$$

$$RF_t = I_0 \epsilon$$

$$F_t = \frac{I_0 a_{sm}}{R^2}$$

Wkład do momentu siły względem środka masy wnosi tylko siła tarcia



Nie obowiązuje
wzór

~~$$F_t = F_R \mu = F_{c\perp} \mu$$~~

obowiązujący tylko
przy zsuwaniu się
ciał

$$F_{c\parallel} - F_t = ma_{sm}$$

$$F_{c\parallel} = mg \sin(\alpha)$$

$$F_t = mg \sin(\alpha) - ma_{sm}$$

$$F_t = \frac{I_0 a_{sm}}{R^2}$$

$$a_{sm} = \frac{mg \sin(\alpha)}{m + \frac{I_0}{R^2}}$$

a_{sm} nie
zależy od
masy i
promienia
kuli

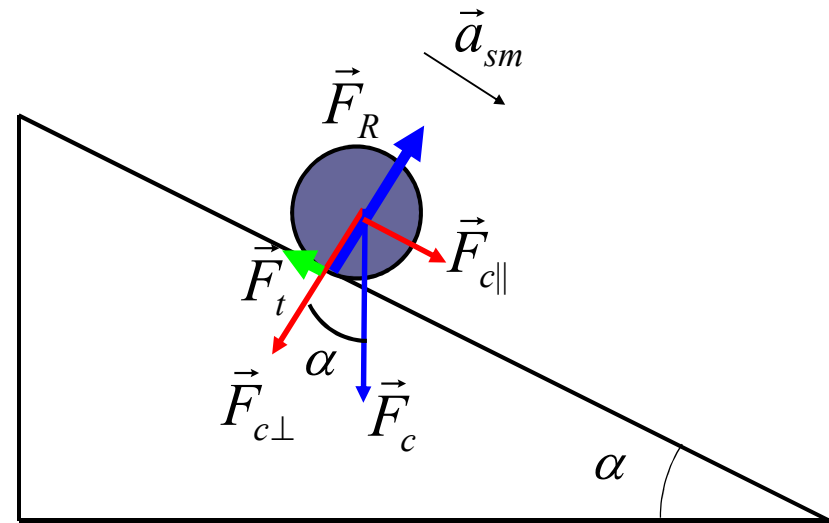
$$I_o = \frac{2}{5} m R^2$$

$$F_t = \frac{2}{7} mg \sin(\alpha)$$

$$a_{sm} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

Aby staczanie kuli bez poślizgu było możliwe musi zachodzić

$$F_t \leq F_{ts,\max}$$



Siła tarcia nie może być większa od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego.

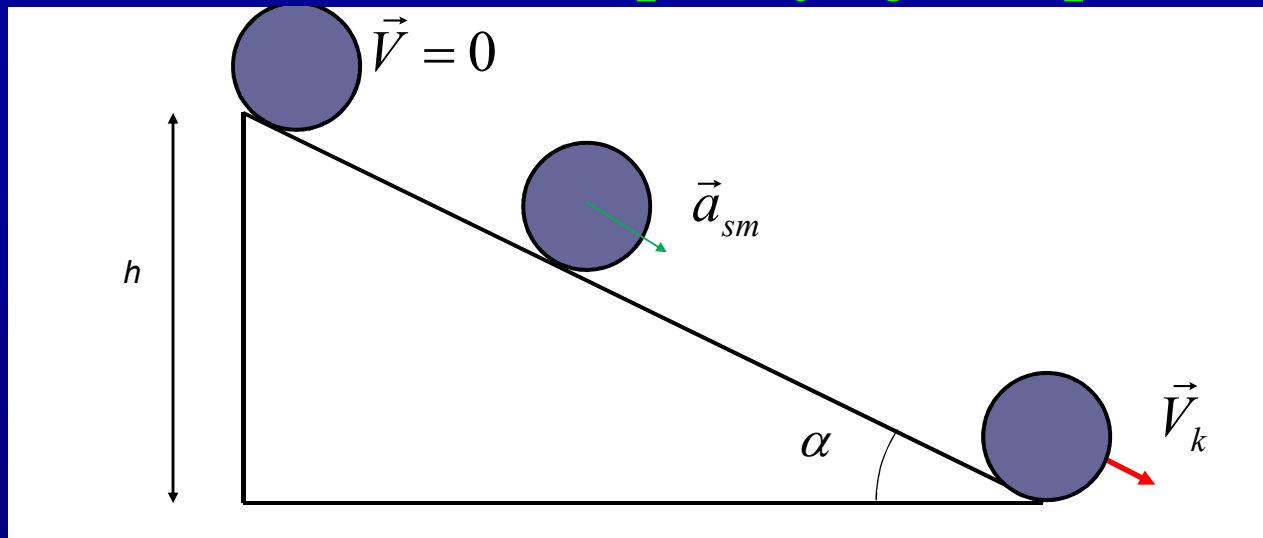
$$F_t = \frac{2}{7} mg \sin(\alpha)$$

$$F_{ts,\max} = F_R \mu_s = F_{c\perp} \mu_s = mg \cos(\alpha) \mu_s$$

$$\mu_s \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg}(\alpha)$$

μ_s - statyczny współczynnik tarcia

Zasada zachowania energii w opisie staczania się kuli z równi pochyłej bez poślizgu



rozważania energetyczne uwzględniające energię potencjalną w polu siły ciężkości

Całkowita energia kuli jest zachowana. Energia potencjalna na szczycie równi zamienia się na energię kinetyczną u podstawy równi

$$mgh = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{I\omega_k^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2 \frac{V_k^2}{R^2}}{2} = \frac{7}{10}mV_k^2$$

$$V_k = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Ponieważ siły działające na kule nie zależą od czasu to ruch jej środka masy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym i można szybkość środka masy u podstawy równi V_k także wyznaczyć ze wzorów na ruch jednostajnie przyspieszony

Wyniki uzyskane obydwojema metodami zgodne ze sobą

$$a_{sm} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$$

$$V_k = a_{sm}t_k$$

$$t_k = \frac{V_k}{a_{sm}}$$

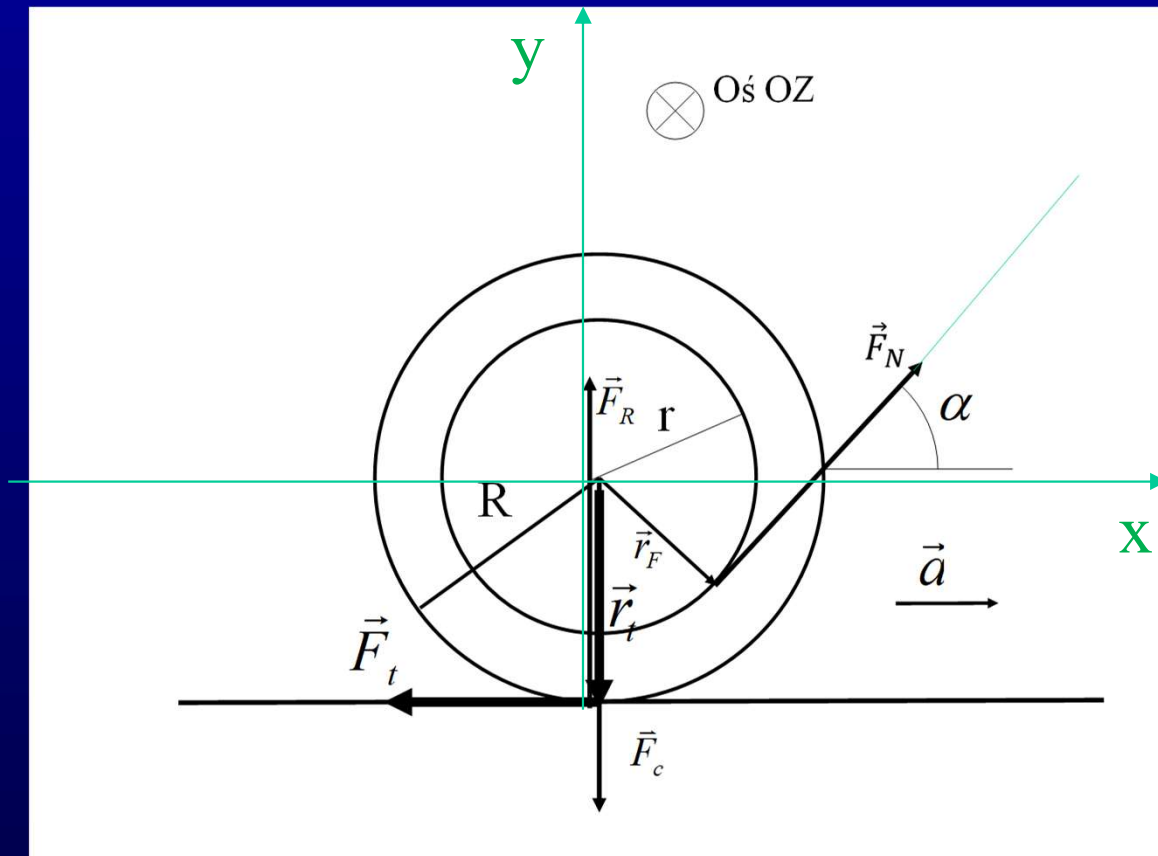
$$S = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a_{sm}t_k^2}{2}$$

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{V_k^2}{2a_{sm}}$$

$$V_k = \sqrt{\frac{2a_{sm}h}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Przykład. Szpulka z nawiniętą nicią może toczyć się bez poślizgu. W jakim kierunku i z jakim przyspieszeniem zacznie się ona toczyć gdy do nici przyłożono siłę F_N . Znamy R , i r - zewnętrzny i wewnętrzny promień szpulki oraz kąt α jaki nić tworzy z poziomem

Rozkład siły $\vec{F}_N$ na składowe $\vec{F}_N = [F_{Nx}, F_{Ny}] = [F_N \cos(\alpha), F_N \sin(\alpha)]$



Przyspieszenie środka masy szpulki jest równe

$$\vec{a} = [a, 0]$$

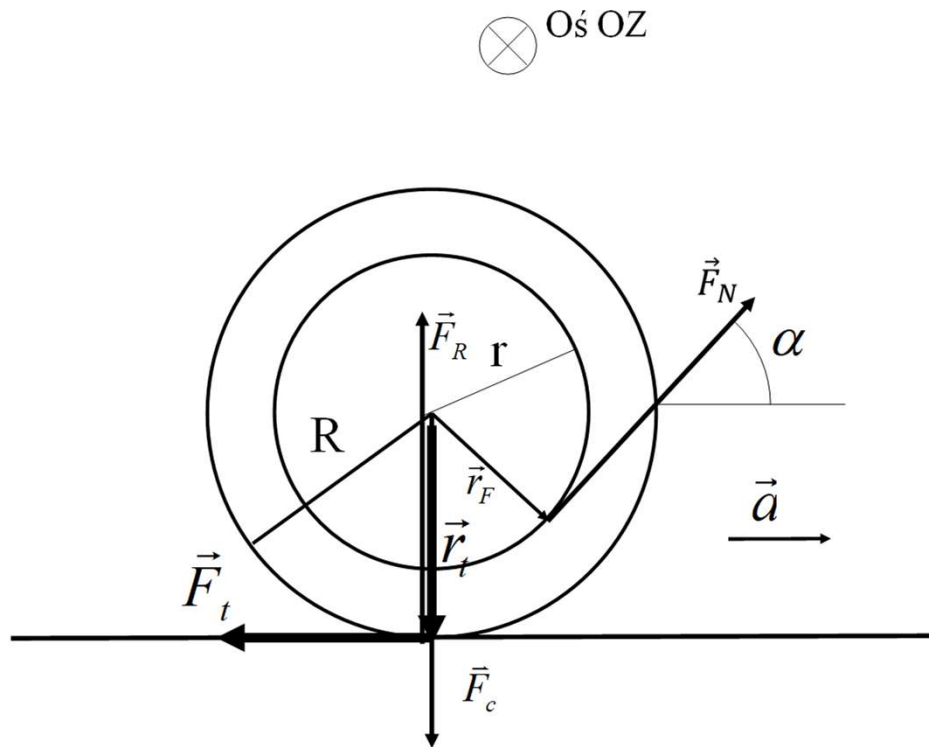
Ponieważ środek masy szpulki nie porusza się w pionie z przyspieszeniem to składowa y-owa siły wypadkowej znika

$$F_{wy} = F_R + F_{Ny} - F_c = 0$$

$$\text{Czyli } F_R = F_c - F_N \sin(\alpha)$$

Składowa x-owa siły wypadkowej jest z kolei równa $F_{wx} = F_{Nx} - F_t$

$$\text{Czyli } ma = F_N \cos(\alpha) - F_t \quad \text{a zatem} \quad F_t = F_N \cos(\alpha) - ma$$



Równanie ruchu obrotowego szpulki

$$I_0 \varepsilon = \tau_{wz}$$

gdzie τ_{wz} – rzut na oś OZ wypadkowego momentu siły określonego względem środka szpulki

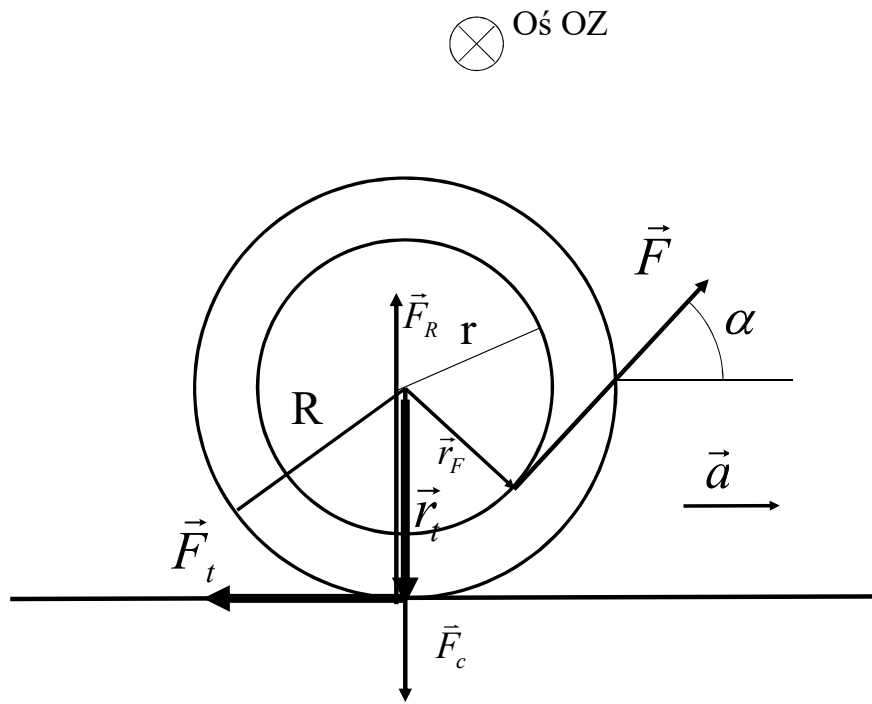
Moment siły F_N ma zwrot przeciwny niż oś OZ, zaś moment siły tarcia ma zwrot taki jak oś OZ (za rysunek) a zatem

$\tau_{wz} = \tau_t - \tau_N$ gdzie $\tau_t = F_t R$ – wartość momentu siły tarcia

$\tau_N = F_N r$ – wartość momentu siły naciągu nici

Związek przyspieszenia środka masy z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = \frac{a}{R}$

A zatem $I_0 \frac{a}{R} = F_t R - F_N r$



$$F_t = F_N \cos(\alpha) - ma$$

$$I_0 \frac{a}{R} = F_t R - F_N r$$

$$I_0 \frac{a}{R} = F_N \cos(\alpha) R - maR - F_N r$$

$$I_0 a = R F_N [\cos(\alpha) R - r] - maR^2$$

$$a = \frac{R F_N [\cos(\alpha) R - r]}{I_0 + mR^2}$$

Widać iż $a > 0$ gdy $\cos(\alpha) > \frac{r}{R}$ co odpowiada ruchowi szpulki w prawo i nawijaniu się nici na szpulkę (wektory prędkości i przyspieszenia środka masy skierowane w prawo, wektory prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego skierowane za płaszczyznę rysunku , szpilka zaczyna obracać się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara).

W przeciwnym razie szpulka zaczyna poruszać się w lewo i nić się odwija ze szpulki (szpulka obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, zmiana zwrotów wektorów prędkości i przyspieszenia środka masy oraz prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego)