



OMNIS2

Zasady wariacyjne mechaniki

- Przypomnienie wybranych informacji o rachunku wariacyjnym
- Wariacja współrzędnych uogólnionych i działania Hamiltona bez wariacji czasu ; zasada Hamiltona i jej równoważność z równaniami Lagrange'a II rodzaju
- Związek symetrii układu z zasadami zachowania – twierdzenie Noether (także z wykorzystaniem pojęcia wariacji funkcjonału z wariacją czasu)



Równania i zasady mechaniki

```
graph TD; A[Równania i zasady mechaniki] --> B[Infinitezymalne (różniczkowe)]; A --> C[Wariacyjne (całkowe)];
```

Infinitezymalne (różniczkowe)

(sformułowane przy wykorzystaniu równań różniczkowych, które wiążą ze sobą położenia układu mechanicznego w nieskończenie sobie bliskich chwilach czasu)

Przykłady:

Zasada d'Alemberta
równania Lagrange'a I i II
rodzaju, równania Newtona,
równania Hamiltona

Wariacyjne (całkowe)

(sformułowane przy wykorzystaniu rachunku wariacyjnego, charakteryzują ruch w skończonym przedziale czasu)

Przykłady:

Zasada Hamiltona
Zasada Maupertuis
Zasada Jacobiego

Sformułowanie zagadnienia wariacyjnego

Rozważamy całkę typu
$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F \left(q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_f(\tau), \frac{dq_1(\tau)}{d\tau}, \frac{dq_2(\tau)}{d\tau}, \dots, \frac{dq_f(\tau)}{d\tau}, \tau \right) d\tau$$

jako funkcjonal niezależnych od siebie funkcji $q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_f(\tau)$ zależnych od zmiennej τ czyli $I = I[q_1, q_2, \dots, q_f]$

Poszukujemy takich optymalnych funkcji $q_l(\tau)$ żeby całka ta osiągała dla tych funkcji wartość ekstremalną (minimalną lub maksymalną).

Koniecznym warunkiem spełnienia tego warunku jest to by infinitezymalnie małe zmiany funkcji $q_l(\tau)$ ($l=1, \dots, f$) nie zmieniały wartości rozważanej całki (w przybliżeniu liniowym zmian funkcjonału względem zmian rozważanych funkcji).

Funkcje spełniające ten warunek będziemy nazywać ekstremalami funkcjonału choć funkcjonal nie musi przyjmować dla tych funkcji wartości ekstremalnej lecz odpowiadają one punktowi stacjonarnemu funkcjonału.

Wariacja funkcji i funkcjonału

Różnicę funkcji porównawczych $q_l^*(\tau)$ i funkcji wybranych $q_l(\tau)$ określa się mianem wariacji funkcji $q_l(\tau)$ (bez wariacji zmiennej τ) i oznacza

$$\delta q_l = q_l^*(\tau) - q_l(\tau)$$

Różnica funkcjonału dla funkcji porównawczych $q_l^*(\tau)$ i funkcji wybranych $q_l(\tau)$ jest równa

$$I^* - I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q_1^*, q_2^*, \dots, q_f^*, q_1^{*'}, q_2^{*'}, \dots, q_f^{*'}, \tau) d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q_1, q_2, \dots, q_f, q_1', q_2', \dots, q_f', \tau) d\tau$$

gdzie $q_l' = \frac{dq_l}{d\tau}$ $q_l^{*'} = \frac{dq_l^*}{d\tau}$

W przybliżeniu liniowym względem δq_l różnicę tą możemy wyrazić poprzez wariację δI funkcjonału I (bez wariacji zmiennej τ) równą całce z wariacji F

$$I^* - I \approx \delta I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta F d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q_l'} \delta q_l' \right) d\tau$$

gdzie $\delta q_l' = q_l^{*'}(\tau) - q_l'(\tau) = \frac{d}{d\tau} (q_l^*(\tau) - q_l(\tau)) = \frac{d}{d\tau} (\delta q_l)$

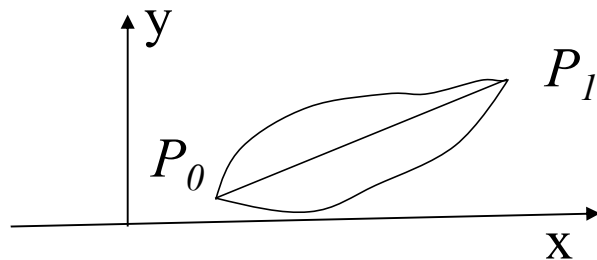
Dla $q_l(\tau)$ będących ekstremalami funkcjonału wariacja δI znika.

Zwykle przy poszukiwaniu ekstremali funkcjonału na funkcje porównawcze nakładamy dodatkowe warunki $q_l^*(\tau = \tau_1) = q_l(\tau = \tau_1)$ oraz $q_l^*(\tau = \tau_0) = q_l(\tau = \tau_0)$ a zatem $\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$

Wartości wszystkich funkcji porównawczych są równe wartościom poszukiwanych ekstremali funkcjonału dla argumentu τ równego dolnej i górnej granicy całkowania. Dla takich τ wariacje δq_l ekstremali funkcjonału znikają.

Przykład

Znaleźć postać funkcji $y(x)$ opisującej krzywą leżącą w płaszczyźnie $z=0$ przechodzącą przez dwa punkty $P_0=(x_0, y_0)$ i $P_1=(x_1, y_1)$ o tej własności iż odległość między punktami mierzona wzdłuż tej krzywej jest minimalna



Infinitymalnie krótki odcinek tej krzywej ma długość $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Szukaną odległość można wyznaczyć jako

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = I[y]$$

(role zmiennej τ pełni x , S jest funkcjonałem funkcji $q_1(x)=y(x)$, $f=1$)

Poszukiwana krzywa optymalna o najkrótszej długości opisana funkcją $y(x)$ musi

spełniać warunek $\delta S = 0$ czyli być ekstremalą funkcjonału $I[y]$

przy dodatkowym warunku $\delta y(x = x_0) = \delta y(x = x_1) = 0$ zapewniającym iż analizujemy tylko krzywe zaczynające się i kończące w punktach P_0 i P_1

Zerowanie się wariacji a równania Eulera Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego

Niezależne od siebie funkcji q_l ($l=1, \dots, f$) będące funkcjami ciągłymi są ekstremalami funkcjonału

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_f(\tau), q_1'(\tau), q_2'(\tau), \dots, q_1'(\tau), \tau) d\tau$$

określonego dla dowolnych τ_0 i τ_1 czyli znika dla nich wariacja funkcjonału $\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} F d\tau = 0$

wówczas gdy znikają wariacje tych funkcji dla $\tau = \tau_0$ i $\tau = \tau_1$ czyli $\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$

wtedy i tylko wtedy gdy funkcje te spełniają równania Eulera-Lagrange'a

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l'} \right) = 0} \quad \text{gdzie} \quad q_l' = \frac{dq_l}{d\tau}$$

Gdy funkcja F nie zależy jawnie od zmiennej τ czyli $\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0$ a zatem

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_f(\tau), q_1'(\tau), q_2'(\tau), \dots, q_1'(\tau)) d\tau$$

to z równań Eulera-Lagrange'a wynika iż zmiana wartości τ nie zmienia wartości funkcji

$$G = \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial q_l'} q_l' - F \quad \text{czyli jej pochodna zupełna po } \tau \text{ znika} \quad \frac{dG}{d\tau} = 0$$

Jak w praktyce znaleźć funkcje dla których funkcjonał może osiągać ekstremum?

Warunkiem koniecznym na to, by funkcjonał $I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q_1, q_2, \dots, q_f, q_1', q_2', \dots, q_f', \tau) d\tau$

gdzie $q_l' = \frac{dq_l}{d\tau}$ przybierał wartość ekstremalną dla funkcji $q_l(\tau)$ pochodzących ze

zboru funkcji porównawczych dla których wariacja znika dla $\tau = \tau_0$ i $\tau = \tau_1$ czyli

$\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0$ jest to by funkcje te spełniały równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l'} \right) = 0 \quad l = 1, \dots, f$$

czyli były ekstremalami funkcjonału dla których znika wariacja funkcjonału

Spełnienie równań Eulera-Lagrange'a przez wybrane funkcje nie jest jednak warunkiem dostatecznym na to by funkcjonał dla tych funkcji osiągał wartość ekstremalną.

Ponieważ spełnienie przez te funkcje równań Eulera-Lagrange'a jest warunkiem równoważnym warunkowi zerowania się wariacji funkcjonału, to wszystkie funkcje dla których funkcjonał osiąga ekstremum muszą być ekstremalami funkcjonału czyli musi znikać dla nich wariacja funkcjonału.

Analogia z poszukiwaniem minimum funkcji $f(x)$.

Funkcje $f(x)$ można rozwinąć w szereg Taylora wokół $x=x_0$

$$f(x) = f(x = x_0) + \frac{df}{dx}(x = x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x = x_0)(x - x_0)^2 + \dots (*)$$

Jeżeli funkcja osiąga ekstremum dla $x=x_0$ to znika pochodna $\frac{df}{dx}(x = x_0)$

I wzór otrzymuje postać $f(x) = f(x = x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x = x_0)(x - x_0)^2 + \dots$

Różnica funkcji $f(x)$ i jej wartości dla $x=x_0$ czyli $f(x=x_0)$ zawiera wyrazy proporcjonalne tylko do drugiej potęgi $(x-x_0)$ lub wyższych potęg $(x-x_0)$ czyli w przybliżeniu liniowym względem $(x-x_0)$, funkcja $f(x)$ nie ulega zmianie przy zmianie $x_0 \rightarrow x$.

Warunek $\frac{df}{dx}(x = x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym aby funkcja miała ekstremum

dla $x=x_0$, ale nie jest to warunek wystarczający (funkcja $f(x)$ może osiągać dla $x=x_0$ ekstremum albo punkt przegięcia)

Przykład Wyznaczenie długości krzywej o równaniu $\varphi = \varphi(\theta)$ łączącej dwie punkty na sferze o promieniu R

Układ sferyczny

$$x = R \sin(\theta) \cos(\varphi) \Rightarrow dx = R \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - R \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi$$

$$y = R \sin(\theta) \sin(\varphi) \Rightarrow dy = R \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + R \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi$$

$$z = R \cos(\theta) \Rightarrow dz = -R \sin(\theta) d\theta$$

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{R^2 [(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\varphi)^2]} = R \sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2} d\theta$$

gdzie $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$

Długość krzywej łączącej punkty o $\theta = \theta_1$ i $\theta = \theta_2$

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta, \varphi') d\theta \quad \text{gdzie} \quad F(\theta, \varphi') = R \sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2} \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Poszukiwanie krzywej o równaniu $\varphi = \varphi(\theta)$ łączącej dwie punkty na sferze o promieniu R o najkrótszej długości

Szukamy ekstremali funkcjonału

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta, \varphi') d\theta \quad \text{gdzie} \quad F(\theta, \varphi') = R \sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2} \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad q_1 = \varphi(\theta), \tau = \theta$$

czyli funkcji spełniających równanie Eulera- Lagrange'a, które przyjmuje postać

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = \text{const} \Rightarrow \frac{R \sin^2(\theta) \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta)(\varphi')^2}} = \text{const}$$

Jeżeli jednemu z punktów odpowiada $\theta=0$ (zawsze tak można przyjąć wybierając odpowiednio oś Oz) to $\text{const}=0$ i otrzymujemy warunek

$$\varphi' = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const} \quad (\text{równanie południka gdy sfera to powierzchnia Ziemi})$$

Ogólnie rozwiązaniem tego równania są dwa łuki koła wielkiego przechodzącego przez punkty na sferze, przy czym tylko jeden łuk odpowiada minimum funkcjonału a drugi spełnia tylko warunek stacjonarności

Wariacja bez czasu funkcjonału zależnego od funkcji opisujących zależność czasową współrzędnych uogólnionych

Opis ruchu rzeczywistego dokonujemy podając zależność współrzędnych uogólnionych od czasu $q_l(t)$ ($l=1, \dots, f$). Ewentualne więzy nie wprowadzają związków między współrzędnymi uogólnionymi, których zmiany można dokonywać w sposób niezależny

Rozważamy zbiór **ruchów porównawczych**, opisanych funkcjami opisującymi zależność współrzędnych uogólnionych od czasu w trakcie tych ruchów w postaci

$$q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t) \quad l = 1, 2, \dots, f$$

gdzie:

$$\delta q_l(t) = q_l^*(t) - q_l(t)$$

wariacja bez wariacji czasu wsp. uogólnionej

Rozpatrujemy dalej funkcjonał zwany **działaniem Hamiltona** zdefiniowany wzorem

$$W_H[q] = \int_{t_0}^{t_1} \{L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t)\} dt$$

t_0 -czas rozpoczęcia analizy ruchu
 t_1 -czas zakończenia analizy ruchu

Widać iż rolę zmiennej τ pełni obecnie czas, zaś funkcji F funkcja Lagrange'a

$$L = T - V \text{ (lub } L = T - U)$$

Zakładamy iż zachodzi $\delta q_l(t = t_0) = \delta q_l(t = t_1) = 0$

Wszystkie ruchy porównawcze zaczynają się i kończą w tej samej chwili czasu i w tym samym położeniu co ruch rzeczywisty

Wariacja δW_H funkcjonału W_H bez wariacji czasu jest równa

$$\delta W_H = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt \quad \text{gdzie} \quad \delta \dot{q}_l = \frac{d}{dt} \delta q_l$$

Zasada Hamiltona. Jeżeli dla układu istnieje funkcja Lagrange'a, wówczas dla ruchu rzeczywistego, i tylko dla ruchu rzeczywistego analizowanego w każdym dowolnie wybranym przedziale czasu (t_0, t_1) znika wariacja z działania Hamiltona bez wariacji czasu jeżeli jednocześnie znikają wariacje współrzędnych uogólnionych dla chwili czasu t_0 i t_1 ruchu

$$\delta W_H[q] = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad \text{gdzie} \quad \delta q_l(t = t_0) = \delta q_l(t = t_1) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Zasada Hamiltona wynika z tego iż znikanie wariacji δI funkcjonału

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_f(\tau), \frac{dq_1(\tau)}{d\tau}, \frac{dq_2(\tau)}{d\tau}, \dots, \frac{dq_f(\tau)}{d\tau}, \tau\right) d\tau \quad \text{dla} \quad \text{każdych}$$

τ_0 oraz τ_1 przy założeniu iż wariacje δq_l są niezależne od siebie oraz przy warunkach dodatkowych $\delta q_l(\tau = \tau_0) = \delta q_l(\tau = \tau_1) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f$

zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy są spełnione równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial q'_l} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_l} = 0 \quad \text{gdzie} \quad q'_l = \frac{dq_l}{d\tau}$$

Po podstawieniu $F=L, \quad \tau = t, \quad \tau_0 = t_0, \tau_1 = t_1$ można zauważyć iż $I=W_H$

A równania E-L stają się **równaniami Lagrange'a II rodzaju**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad \text{gdzie} \quad \dot{q}_l = \frac{dq_l}{dt}$$

Prawdziwość równań Lagrange'a II rodzaju jest dowodem prawdziwości zasady wariacyjnej Hamiltona dla rozważanych układów

Znikanie wariacji działania Hamiltona dla każdego przedziału czasu (t_0, t_1) podczas ruchu gdy dla $t=t_0$ i $t=t_1$ znikają wariacje wszystkich współrzędnych uogólnionych $\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$ jest równoważne równaniom Lagrange'a II rodzaju

$$\delta W_H[q] = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$$

(dowód wymagany)

Dowód:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d}{dt} (\delta q_l) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \delta q_l dt + \sum_{l=1}^f \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) dt. \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \delta q_l dt + \sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \delta q_l dt. \end{aligned}$$

$$\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$$

$$(\Leftarrow) \quad \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \Rightarrow \text{Niech } \delta q_l = \begin{cases} \delta q_k(t) \neq 0 & \text{dla } l = k \\ 0 & \text{dla } l \neq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt = 0$$

Określamy w linowym przybliżeniu zmianę działania Hamiltona wynikającą z modyfikacji wybranej funkcji q_k , której zmiana nie powoduje zmiany pozostałych, wariacje różnych funkcji q_k są od siebie niezależne

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \text{ bo } \delta q_k(t) \text{ dowolne.}$$

Gdyby dla t z zakresu $t_0 \leq t_A < t < t_B \leq t_1$ zachodziłoby $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) > 0$

lub $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) < 0$ to dobierając $\delta q_k = \begin{cases} \delta(t) > 0 & \text{gdy } t_A < t < t_B \\ 0 & \text{gdy } t < t_A \text{ lub } t > t_B \end{cases}$

otrzymalibyśmy to iż $\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt \neq 0$

Powtarzając przeprowadzone rozumowanie dla $k=1,2,\dots,f$ otrzymujemy warunek mówiący iż zerowanie się wariacji działania Hamiltona wymaga spełnienia wszystkich równań Lagrange'a II rodzaju

Równania Lagrange'a II rodzaju są niezmiennicze przy poniższej transformacji-
zamianie funkcji Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Psi(q, t)}{dt}$$

gdzie $\frac{d\Psi(q, t)}{dt}$ - pochodna zupełna po czasie dowolnej funkcji zależnej od

współrzędnych uogólnionych i czasu

Oznacza to iż zachodzą jednocześnie równania

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, \dots, f \quad \text{jak i równania} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_l} = 0 \quad l = 1, \dots, f$$

Dowód opiera się na pokazaniu iż zachodzi równość wariacji

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q, \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad \text{przy warunku} \quad \delta q_l(t = t_1) = 0 = \delta q_l(t = t_2)$$

skąd wynika niezmienniczość równań Lagrange'a II rodzaju

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q, \dot{q}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Psi(q, t)}{dt} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Psi(q, t)}{dt} dt =$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} (L(q, \dot{q}, t)) dt + \delta \Psi(q, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L(q, \dot{q}, t)) dt + \sum_{l=1}^f \frac{\partial \Psi}{\partial q_l} \delta q_l \Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L(q, \dot{q}, t)) dt$$

gdyż $\delta q_l(t = t_1) = 0 = \delta q_l(t = t_2) \quad l = 1, \dots, f$; f - liczba współrzędnych uogólnionych

Przykład. Można pokazać iż równania Lagrange'a II rodzaju dla funkcji Lagrange'a równej

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4}m(\omega_1^2 - \omega_0^2)(x_1 - x_2)^2$$

są takie same jak funkcji Lagrange'a równej

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 - i\omega_0 x_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2 - i\omega_0 x_2)^2 - \frac{1}{4}m(\omega_1^2 - \omega_0^2)(x_1 - x_2)^2$$

i mają postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_1 + m\omega_0^2 x_1 + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 - \omega_0^2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_2 + m\omega_0^2 x_2 - \frac{1}{2}m(\omega_1^2 - \omega_0^2)(x_1 - x_2) = 0$$

Wynika to z faktu iż

$$L' - L = -i\omega_0 m(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) = -\frac{i\omega_0 m}{2} \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{d}{dt}\Psi(x_1, x_2)$$

gdzie

$$\Psi(x_1, x_2) = -\frac{i\omega_0 m}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Warunkiem koniecznym na to, by działanie Hamiltona $W_H[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$

analizowane w dowolnie wybranym przedziale czasu (t_0, t_1) przyjmowało wartość minimalną (w ogólności ekstremalną) dla ruchu opisanego funkcjami $q_i(t)$ w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych $q_i^*(t)$, których wariacje w chwilach t_0, t_1 znikają, jest znikanie wariacji działania Hamiltona (zachodzące w ruchu rzeczywistym) .

Spełnienie tej Zasady w ogólnym przypadku nie jest jednak warunkiem wystarczającym na to by działanie Hamiltona określone powyżej przyjmowało wartość minimalną (również ekstremalną) dla ruchu rzeczywistego w klasie ruchów porównawczych.

Działanie to może nie przyjmować zawsze wartości minimalnej dla ruchu rzeczywistego gdy przedział czasu (t_0, t_1) jest odpowiednio długi, natomiast dla krótkich przedziałów czasu ruch rzeczywisty odpowiada minimalizacji działania Hamiltona

(zasada najmniejszego działania słuszna dla krótkich przedziałów czasu : układ mechaniczny porusza się tak by działanie Hamiltona przyjmowało wartość minimalną)

Dowód tego iż działanie Hamiltona może przyjąć wartość ekstremalną tylko dla ruchu rzeczywistego, dla którego znika wariacja działania Hamiltona gdy znikają wariacje współrzędnych $\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$

Niech $q_l^*(t) = q_l(t) + \alpha_l \eta_l(t) \Rightarrow \delta q_l(t) = \alpha_l \eta_l(t), \quad l=1,2,\dots,f$

α_l –zmienne, $\eta_l(t)$ -dowolne funkcje spełniające warunki

$$\eta_l(t=t_0) = \eta_l(t=t_1) = 0, \quad l=1,2,\dots,f$$

Ustalmy funkcje $\eta_l(t)$. Definiujemy funkcje (nie funkcyjna!) zmiennych $\alpha_1, \dots, \alpha_f$

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \equiv$$

$$W_H[q_1(t) + \alpha_1 \eta_1(t), \dots, q_l(t) + \alpha_l \eta_l(t), \dots, q_f(t) + \alpha_f \eta_f(t), \dot{q}_1(t) + \alpha_1 \dot{\eta}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t) + \alpha_l \dot{\eta}_l(t), \dots, \dot{q}_f(t) + \alpha_f \dot{\eta}_f(t)]$$

$$\text{gdzie } W_H[q_1, \dots, q_l, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, \dots, \dot{q}_f] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_l, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, \dots, \dot{q}_f, t) dt$$

$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_f)$ -funkcja zmiennych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ musi przyjmować wartość ekstremalną

dla $\alpha_l=0$ ($l=1, \dots, f$) niezależnie od wyboru funkcji η_l żeby rozpatrywany funkcjonal przyjmował wartość ekstremalną dla $q_l(t)$

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \equiv W_H[q_1(t) + \alpha_1 \eta_1(t), \dots, q_l(t) + \alpha_l \eta_l(t), \dots, q_f(t) + \alpha_f \eta_f(t), \dot{q}_1(t) + \alpha_1 \dot{\eta}_1(t), \dots, \dot{q}_l(t) + \alpha_l \dot{\eta}_l(t), \dots, \dot{q}_f(t) + \alpha_f \dot{\eta}_f(t)]$$

$$W_H[q_1, \dots, q_l, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, \dots, \dot{q}_f] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \dots, q_l, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, \dots, \dot{q}_f, t) dt$$

$$\Phi(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_f = 0) = \text{ekstremum} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_l} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f$$

Implikacja jednostronna

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_l} \right|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \eta_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{\eta}_l \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \eta_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\eta_l}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} \eta_l + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \eta_l - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \eta_l \right) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \eta_l \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \eta_l dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \eta_l \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \eta_l dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \eta_l dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0}, \text{ bo } \eta_l(t) \text{ dowolne} \quad \text{f równań Lagrange'a II rodzaju}$$

Gdyby dla t z zakresu $t_0 \leq t_A < t < t_B \leq t_1$ zachodziłoby $\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) > 0$ lub $\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) < 0$

to dobierając $\eta_l = \begin{cases} \delta(t) > 0 & \text{gdy } t_A < t < t_B \\ 0 & \text{gdy } t < t_A \text{ lub } t > t_B \end{cases}$ otrzymalibyśmy to iż $\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \eta_l dt \neq 0$

Spełnienie równań Lagrange'a II rodzaju zapewnia to iż funkcje $q_l(t)$ opisują ruch rzeczywisty, co jest równoważne temu iż funkcje te są ekstremalami funkcjonału dla których znika wariacja działania Hamiltona (dowód slajd 13)

Zalety sformułowania praw mechaniki przy pomocy zasad wariacyjnych

Zasady wariacyjne mechaniki (których przykładem jest zasada Hamiltona) stanowią najbardziej zwarte sformułowanie praw mechaniki klasycznej.

Pozwalają one na formułowanie analogi praw mechaniki klasycznej z innymi działami fizyki, w których podstawowe prawa również można sformułować w postaci zasad wariacyjnych.

Metody wariacyjne ułatwiają powiązanie zasad zachowania wielkości fizycznych z symetrią układu w oparciu np. o analizę niezmienniczości działania Hamiltona przy ciągłych transformacjach współrzędnych uogólnionych odpowiadających operacjom symetrii układu.

Pozwalają także na wyznaczenie ruchu najbliższego ruchowi rzeczywistemu w klasie ruchów porównawczych parametryzowanych przez parametr (zespół parametrów), gdy określonymu zestawowi wartości tych parametrów odpowiada ruch bliski ruchowi rzeczywistemu. Wartości te można wyznaczyć określając dla jakiego zestawu parametrów działanie Hamiltona analizowane dla krótkiego przedziału czasu ruchu traktowane jako funkcje tych parametrów osiąga wartość minimalną.

Przykład: Rozważamy swobodny spadek ciała pod wpływem siły ciężkości. Oś Oz obieramy pionowo w dół i zakładamy iż w chwili startu czyli w chwili $t=0$ ciało znajdowało się w punkcie $z(t=0)=0$. Czas spadku ciała wynosił t_1

Pokażemy że dla ruchu rzeczywistego : $z = \frac{1}{2}gt^2$ działanie Hamiltona

$$W_H[z(t)] = \int_0^{t_1} L[z(t), \dot{z}(t)] dt$$

przyjmuje wartość minimalną w klasie ruchów porównawczych

$$z^* = z_n = a_n t^n \quad (n > 0)$$

spełniających dodatkowo warunek $\delta z(t=0) = \delta z(t=t_1) = 0$

Pierwszy z warunków nałożonych na wariacje jest automatycznie spełniony. Z drugiego warunku wynika iż

$$z_n(t=t_1) = z(t=t_1) \Rightarrow a_n t_1^n = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}gt_1^{2-n}$$

$$\text{czyli} \quad z_n = \frac{1}{2}gt_1^{2-n}t^n$$

$$z_n = \frac{1}{2} g t_1^{2-n} t^n \Rightarrow \dot{z}_n = \frac{1}{2} g n t_1^{2-n} t^{n-1}$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - V = \frac{m \dot{z}_n^2}{2} + m g z_n = \frac{m g^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8} t^{2n-2} + \frac{1}{2} m g^2 t_1^{2-n} t^n$$

Działanie Hamiltona

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_1} L dt = \frac{m g^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8} \int_0^{t_1} t^{2n-2} dt + \frac{1}{2} m g^2 t_1^{2-n} \int_0^{t_1} t^n dt = \\ &= \frac{m g^2 n^2 t_1^{4-2n}}{8(2n-1)} t_1^{2n-1} + \frac{1}{2(n+1)} m g^2 t_1^{2-n} t_1^{n+1} = \\ &= \frac{m g^2 t_1^3}{2} \left(\frac{n^2}{4(2n-1)} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{m g^2 t_1^3}{2} f(n) \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } f(n) = \frac{n^2}{4(2n-1)} + \frac{1}{n+1}$$

Pokażemy iż dla ruchu rzeczywistego o $n=2$ działanie Hamiltona przyjmuje wartość minimalną gdy pokażemy iż

$$\frac{df}{dn}(n=2)=0$$

(gwarancją spełnienia tego warunku jest znikanie wariacji

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(z, \dot{z}, t) dt = 0 \quad \text{gdzie} \quad \delta z(t=t_0) = \delta z(t=t_1) = 0, \quad l=1,2,\dots, f$$

w ruchu rzeczywistym gdy $n=2$)

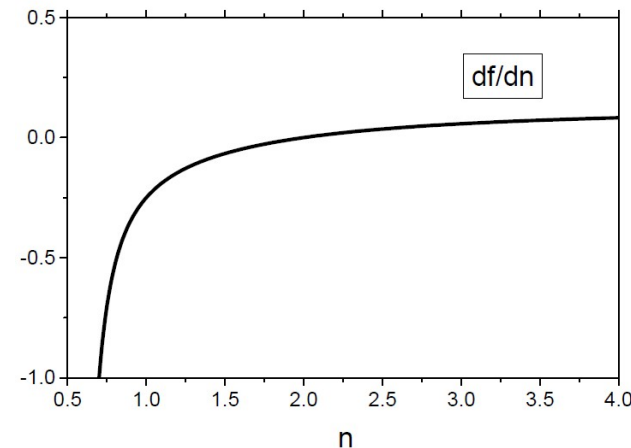
oraz to iż dla $\frac{df}{dn}(n>2)>0$ i $\frac{df}{dn}(n<2)<0$

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n^2}{4(2n-1)} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{df}{dn} = \frac{2n \cdot 4(2n-1) - 8n^2}{16(2n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{8n^2 - 8n}{16(2n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n-1)}{2(2n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{df}{dn}(n=2)=0 \end{aligned}$$

Dodatkowo widać iż

$$\frac{df}{dn}(n>2)>0 \quad \frac{df}{dn}(n<2)<0$$

a więc ruch rzeczywisty odpowiada w rozważanej klasie ruchów porównawczych minimum działania Hamiltona



Przykład : Rozważamy ciało o masie m które porusza się pod wpływem siły harmoniczej

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

Ponadto wiadomo iż $x(t=0)=0$ oraz $x(t=t_1)=x_1$, a $\dot{x}(t=0) > 0$

Wiadomo iż zależność położenia ciała od czasu w ruchu rzeczywistym dana jest

wzorem $x = \frac{x_1}{\sin(\omega t_1)} \sin(\omega t)$ gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

czyli zachodzi także $\dot{x} = \frac{x_1 \omega}{\sin(\omega t_1)} \cos(\omega t)$

Funkcja Lagrange'a $L = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = \frac{m x_1^2 \omega^2}{2 \sin^2(\omega t_1)} \cos^2(\omega t) - \frac{k x_1^2}{2 \sin^2(\omega t_1)} \sin^2(\omega t)$

$$= \frac{k x_1^2}{2 \sin^2(\omega t_1)} [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] = \frac{k x_1^2}{2 \sin^2(\omega t_1)} \cos(2\omega t)$$

Działanie Hamiltona dla ruchu analizowanego w przedziale czasu $(0, t_1)$

$$W_H = \int_0^{t_1} L dt = \frac{k x_1^2}{2 \sin^2(\omega t_1)} \int_0^{t_1} \cos(2\omega t) dt = \frac{k x_1^2 \sin(2\omega t_1)}{4 \omega \sin^2(\omega t_1)} = \frac{k x_1^2}{2 \omega} \operatorname{ctg}(\omega t_1)$$

Rozważamy ruch porównawczy postaci $x^* = \frac{x_1}{t_1} t \Rightarrow \dot{x}^* = \frac{x_1}{t_1}$

Spełnia on warunek $\delta x(t=0) = \delta x(t=t_1) = 0$ gdyż $x^*(t=0) = 0$ $x^*(t=t_1) = x_1$

Funkcja Lagrange'a $\tilde{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 = \frac{kx_1^2}{2t_1^2} \left(\frac{m}{k} - t^2 \right) = \frac{kx_1^2}{2t_1^2} \left(\frac{1}{\omega^2} - t^2 \right)$

Działanie Hamiltona

a) w ruchu porównawczym $\tilde{W}_H = \int_0^{t_1} L dt = \int_0^{t_1} \frac{kx_1^2}{2t_1^2} \left(\frac{1}{\omega^2} - t^2 \right) dt = \frac{kx_1^2}{2t_1^2} \left(\frac{t_1}{\omega^2} - \frac{t_1^3}{3} \right) = \frac{kx_1^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} \right)$

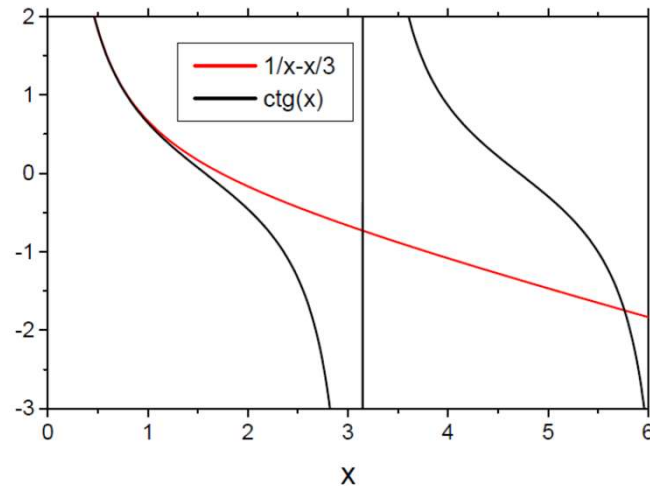
b) w ruchu rzeczywistym $W_H = \frac{kx_1^2}{2\omega} \text{ctg}(\omega t_1)$

Powyższy przykład pokazuje iż działanie w ruchu rzeczywistym nie zawsze musi być mniejsze niż działanie w ruchu porównawczym.

Działanie to rzeczywiście jest najmniejsze gdy czas ruchu t_1 jest odpowiednio krótki gdyż wówczas

$$\text{ctg}(\omega t_1) \stackrel{\omega t_1 \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} - \frac{(\omega t_1)^3}{45} \Rightarrow \text{ctg}(\omega t_1) < \frac{1}{\omega t_1} - \frac{\omega t_1}{3} \Leftrightarrow W_H < \tilde{W}_H$$

Gdy $\omega t_1 > \pi \Leftrightarrow t_1 > \pi / \omega$ czyli t_1 jest większy od połowy okresu drgań równego $2\pi / \omega$ to działanie w ruchu rzeczywistym jest większe niż w rozpatrywanym ruchu porównawczym a więc nie przyjmuje ono wartości minimalnej w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych choć wariacja działania dla ruchu rzeczywistego znika. Nie oznacza to iż działanie w rozważanym ruchu porównawczym przyjmuje wartość ekstremalną w zbiorze wszystkich ruchów porównawczych (co wynika z tego iż dla tego ruchu nie znika wariacja działania gdyż nie spełnia on równań Eulera-Lagrange'a dla zagadnienia wariacyjnego z działaniem Hamiltona czyli równań Lagrange'a II rodzaju).



Okazuje się iż funkcjonal $\int_{t_0}^{t_1} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt$ może osiągnąć minimum dla ekstremali tego funkcjonału $q(t)$ tylko wówczas gdy nie ma innej ekstremali $\tilde{q}(t)$ funkcjonału $\int_{t_0}^{t_1} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt$ o takiej własności iż dla pewnej chwili czasu t z zakresu (t_0, t_1) zachodzi $q(t) = \tilde{q}(t)$ oraz $\tilde{q}(t = t_0) = q(t = t_0)$ lub $\tilde{q}(t = t_1) = q(t = t_1)$

W przypadku rozważanym dla czasu $t = \frac{\pi}{\omega}$ następuje przecięcie ekstremal odpowiadających drganiom o tej samej częstości różniących się amplitudą drgań. We wszystkich ruchach opisywanych przez te ekstremale drgające ciało w chwili $t=0$ znajdowało się w położeniu równowagi a więc

$$\tilde{q}(t = t_0 = 0) = q(t = t_0 = 0) = 0$$

Zasada Hamiltona a równania Lagrange'a I rodzaju (dla zainteresowanych)

Założmy iż ruch układu złożonego z n ciał analizujemy we współrzędnych kartezjańskich nie będących współrzędnymi uogólnionymi w $3n$ wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej w obecności p więzów opisanych równaniami

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{3n}) = 0 \quad k = 1, \dots, p$$

W ruchu rzeczywistym zachodzić musi nie tylko znikanie wariacji

działania Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(x_j, \dot{x}_j, t) dt$ rozumianego jako funkcjonal współrzędnych x_j ($j=1, \dots, 3n$) ale także muszą być spełnione warunki

dodatkowe
$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad k = 1, \dots, p \quad \delta x_j(t=t_0) = \delta x_j(t=t_1) = 0 \quad j = 1, \dots, 3n$$

Warunki te powodują iż wariacje δx_j nie są niezależne od siebie. Można je jednak za takie traktować gdy zażąda się by zniknęła poniższa wariacja

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(L(x_j, \dot{x}_j, t) + \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k \right) dt = 0$$

$$\delta f_k = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$$

przy warunkach $\delta x_j(t=t_0) = \delta x_j(t=t_1) = 0 \quad j = 1, \dots, 3n$

λ_k -to nieoznaczone mnożniki Lagrange'a

Postępując analogicznie jak poprzednio można pokazać iż

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(L(x_j, \dot{x}_j, t) + \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{3n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} + \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \right) \delta x_j dt$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(L(x_j, \dot{x}_j, t) + \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x_j) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{3n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} + \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \right) \delta x_j dt$$

Przy braku wynikających z więzów warunków na δx_j znikanie powyższej wariacji jest równoważne spełnieniu równań postaci
$$\frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = 0 \quad j = 1, \dots, 3n \quad (*)$$

(ściślej można przeprowadzić argumentację zgodnie z którą naprawdę tylko δx_j dla $j=p+1, \dots, 3n$ są niezależne, a pozostałe są zależne, a równania typu (*) są spełnione także dla $j=1, \dots, p$ dzięki odpowiedniemu wybraniu p mnożników Lagrange'a)

Ponieważ $L = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_j, \dots, \dot{x}_{3n}) - U(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{3n}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_j, \dots, \dot{x}_{3n}, t) =$

$$= \sum_{j=1}^{3n} \frac{m_j \dot{x}_j^2}{2} - U(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{3n}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_j, \dots, \dot{x}_{3n}, t)$$

to

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{d}{dt} (m_j \dot{x}_j) = X_j - m_j \ddot{x}_j$$

$$(X_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right) \quad -j\text{-ta składowa siły})$$

$$\text{czyli równania } \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = 0 \Leftrightarrow X_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = m_j \ddot{x}_j$$

są równaniami Lagrange'I rodzaju

Zmiana działania Hamiltona przy transformacji współrzędnych

Rozpatrujemy zmianę funkcjonału będącego działaniem Hamiltona

$W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(q_l(t), \dot{q}_l(t), t) dt$ przy infinitesimalnych transformacjach współrzędnych uogólnionych spełniających równania Lagrange'a II rodzaju $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$

Zmianę współrzędnych wyrażamy przez wariacje $q_l(t) \rightarrow q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t)$

Zmiana działania Hamiltona jest równa w pierwszym przybliżeniu wariacji tego funkcjonału czyli

$$\begin{aligned} W_H[q + \delta q] - W_H[q] &\approx \delta W_H = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d}{dt} (\delta q_l) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \right] dt \end{aligned}$$

Nie zakładamy iż ~~$\delta q_l(t=t_0) = \delta q_l(t=t_1) = 0$~~ w związku z czym w ogólnym przypadku $\delta W_H \neq 0$

Gdy jednak dla dowolnych t_0, t_1 $\delta W_H = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = const$

Twierdzenie Noether (wersja uproszczona)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji współrzędnych uogólnionych

$$q_l(t) \rightarrow q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t)$$

działanie Hamiltona $W_H = \int_{t_0}^{t_1} L(q_l(t), \dot{q}_l(t), t) dt$ dla dowolnych t_0, t_1 jest jej niezmiennikiem czyli jego wariacja znika $\delta W_H = 0$

to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych poniższym wzorem

$$\sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \text{const}$$

Wielkości tych jest tyle ile parametrów jest niezbędnych do sparametryzowania grupy transformacji współrzędnych dla których działanie Hamiltona jest ich niezmiennikiem

Ciągłość transformacji zapewnia iż można dowolną transformację skończoną przedstawić zawsze jako złożenie infinitezymalnie małych transformacji w przypadku których zmianę działania można przybliżyć poprzez jego wariację. Ponadto można przyjąć iż parametry przyjęte do sparametryzowania grupy transformacji mogą przyjmować dowolne wartości ze zbioru ciągłego.

Rozważamy układ złożony z n punktów materialnych na które nie nałożono więzów przyjmując za współrzędne uogólnione współrzędne w układzie kartezjańskim tych punktów ($q_j = x_j, j=1, \dots, f=3n$).

Gdy działanie Hamiltona $W = \int_{t_0}^{t_1} L(x_j, \dot{x}_j, t) dt$

jest niezmiennikiem transformacji $x_j(t) \rightarrow x_j^*(t) = x_j(t) + \delta x_j(t)$,
to wielkość określona poniższym wzorem jest całką ruchu

$$\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} p_j \delta x_j = \sum_{i=1}^n (p_{ix} \delta x_i + p_{iy} \delta y_i + p_{iz} \delta z_i) = \text{const} \quad (*)$$

Niezmienniczość względem przesunięć w przestrzeni

Rozważmy przesunięcie układu wzdłuż osi Ox o dowolny δx .

Wówczas

$$\delta x_i = \delta x \quad \delta y_i = \delta z_i = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_{ix} \delta x = \text{const} \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_{ix} = \text{const} \quad \text{Zasada zachowania x-owej składowej pędu}$$

Aby działanie Hamiltona było niezmiennicze względem tej transformacji funkcja Lagrange'a może zależeć od x-owych składowych wektorów wodzących punktów materialnych tylko poprzez ich różnice

$$\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) = \sum_{j=1}^{3n} p_j \delta x_j = \sum_{i=1}^n (p_{ix} \delta x_i + p_{iy} \delta y_i + p_{iz} \delta z_i) = \text{const} \quad (*)$$

Niezmienniczość względem obrotów

Rozważmy obrót o dowolny kąt $\delta\varphi$ wokół osi Oz. Odpowiada mu obrót osi układu o kąt $-\delta\varphi$

$$x_i^* = x_i \cos(\delta\varphi) - y_i \sin(\delta\varphi) \quad y_i^* = y_i \cos(\delta\varphi) + x_i \sin(\delta\varphi)$$

Gdy $\delta\varphi \rightarrow 0$ w przybliżeniu $\cos(\delta\varphi) \approx 1, \sin(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$

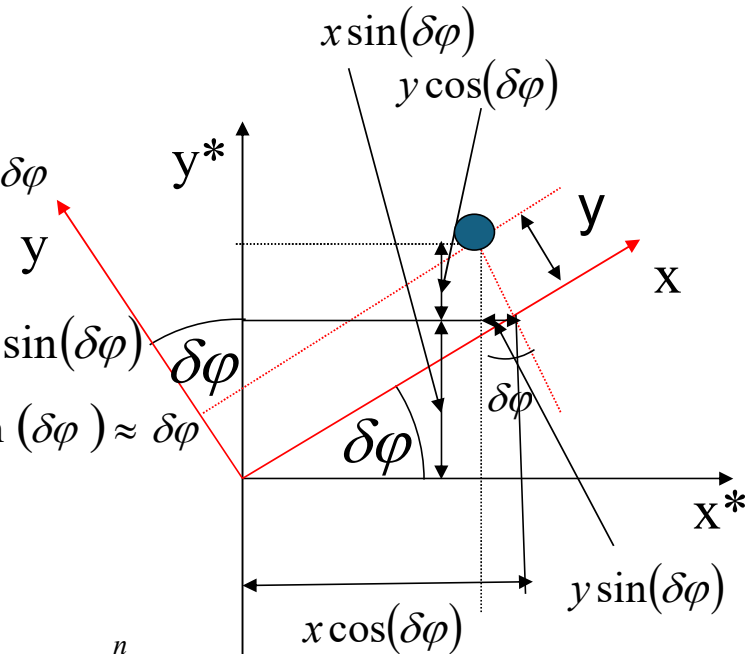
$$x_i^* = x_i - y_i \delta\varphi, y_i^* = y_i + x_i \delta\varphi, z_i^* = z_i$$

$$\Rightarrow \delta x_i = -y_i \delta\varphi, \delta y_i = x_i \delta\varphi, \delta z_i = 0$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^n (-p_{ix} y_i + p_{iy} x_i) \delta\varphi = \text{const} \Rightarrow L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n x_i p_{iy} - y_i p_{ix} = \text{const}$$

Zasada zachowania z-wej składowej momentu pędu

Uwaga. Obrót o skończony kąt wokół osi OZ można przedstawić jako złożenie obrotów o kąty nieskończenie małe wokół tej osi co świadczy o tym iż obrót jest transformacją ciągłą, którą można sparametryzować przez kąt obrotu.



Dygresja

Zapis macierzowy operacji infinitezymalne małego obrotu wokół osi Oz o kąt $\delta\varphi$

$$\begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \\ z_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\varphi & 0 \\ \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \hat{R}_z \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}_z = \hat{I} + \hat{I}_z \delta\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\varphi \quad \hat{I}_z \text{-generator obrotów wokół osi OZ}$$

W przypadku obrotu wokół osi Oz o skończony kąt $\delta\varphi$

$$\hat{R}_z = e^{\hat{I}_z \delta\varphi} = I + \hat{I}_z \delta\varphi + \frac{1}{2} \hat{I}_z \cdot \hat{I}_z (\delta\varphi)^2 + \dots = \begin{bmatrix} \cos(\delta\varphi) & -\sin(\delta\varphi) & 0 \\ \sin(\delta\varphi) & \cos(\delta\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W przypadku infinitezymalne małego obrotu wokół osi Ox (Oy) mielibyśmy

$$\hat{R}_x = \hat{I} + \hat{I}_x \delta\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta\varphi \quad \hat{R}_y = \hat{I} + \hat{I}_y \delta\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\varphi$$

Można pokazać iż gdy obrót taki nie zmienia działania Hamiltona to całkami ruchu są odpowiednio x-owa(y-owa) składowa momentu pędu układu

Jakie wielkości są zachowane przy transformacji ciągłej parametryzowanej przy pomocy pojedynczej zmiennej s dowolnego układu złożonego z n punktów materialnych gdy transformacja ta nie zmienia działania Hamiltona?

Rozważamy transformacje infinitezymalnie małą prowadzącą do zmiany współrzędnych uogólnionych parametryzowaną przy pomocy zmiennej s

$$q_l \rightarrow q_l^*(q_l, s) = q_l + \delta q_l = q_l + \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s \quad (l=1, \dots, f) \quad f\text{-liczba stopni swobody}$$

Gdy $s=0$ to powyższa transformacja nie zmienia współrzędnych uogólnionych

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem powyższej transformacji w której s przyjmuje wartości ze zbioru ciągłego łącznie z $s=0$ wynika iż

$$\sum_{l=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s = const \Rightarrow \sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0) = const$$

p_l -pęd uogólniony związany ze współrzędną q_l

Rozważamy układ złożony z n punktów materialnych na ruch którego nie nałożono więzów. Za współrzędne uogólnione przyjmujemy składowe wektorów wodzących punktów materialnych w układzie kartezjańskim

$$q_l = \begin{cases} x_i & \text{gdy } l = 3i - 2 \\ y_i & \text{gdy } l = 3i - 1 \\ z_i & \text{gdy } l = 3i \end{cases} \quad l = 1, \dots, f = 3n, \quad i = 1, \dots, n$$

Rozważmy transformacje tych współrzędnych dane wzorami

$$q_l \rightarrow q_l^*(q_l, s) = q_l + \delta q_l = q_l + \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0)s$$

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem powyższej transformacji wynika iż całką ruchu jest wielkość

$$\sum_{l=1}^f p_l \frac{\partial q_l^*}{\partial s}(s=0) = \sum_{i=1}^n \left(p_{ix} \frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy} \frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz} \frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0) \right) = \text{const}$$

W przypadku translacji wszystkich n punktów materialnych układu o dowolnie mały wektor dany w układzie kartezjańskim wzorem $\delta \vec{r}_i = (s, 0, 0)$ następuje transformacja składowych w układzie kartezjańskim wektorów wodzących wszystkich punktów układu opisana wzorami

$$i=1, \dots, n \quad x_i \rightarrow x_i^* = x_i + s \quad y_i \rightarrow y_i^* = y_i \quad z_i \rightarrow z_i^* = z_i$$

Gdy transformacja omawiana nie prowadzi do zmiany działania Hamiltona to wielkością zachowaną jest $\sum_{i=1}^n \left(p_{ix} \frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy} \frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz} \frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0) \right) = \sum_{i=1}^n p_{ix}$

(suma x -owych składowych wektorów pędu wszystkich punktów układu)

W przypadku obrotu układu wokół osi Oz o kąt s dowolnie mały mamy dla wszystkich punktów w układzie kartezjańskim

$$x_i \rightarrow x_i^* = x_i \cos(s) - y_i \sin(s) \quad y_i \rightarrow y_i^* = y_i \cos(s) + x_i \sin(s) \quad z_i \rightarrow z_i^* = z_i$$

Gdy transformacja omawiana nie prowadzi do zmiany działania Hamiltona to wielkością zachowaną jest

$$\sum_{i=1}^n \left(p_{ix} \frac{\partial x_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iy} \frac{\partial y_i^*}{\partial s}(s=0) + p_{iz} \frac{\partial z_i^*}{\partial s}(s=0) \right) \\ = \sum_{i=1}^n p_{ix} (-x_i \sin(s=0) - y_i \cos(s=0)) + p_{iy} (-y_i \sin(s=0) + x_i \cos(s=0)) =$$

$$\sum_{i=1}^n -p_{ix} y_i + p_{iy} x_i = \sum_{i=1}^n L_{iz} = L_z \quad \text{składowa z-owa momentu pędu układu}$$

Rozważamy układ złożony z punktu materialnego który może poruszać się po linii spiralnej leżącej wzdłuż osi Oz o promieniu a i skoku h . Opis ruchu możemy dokonać w układzie cylindrycznym, w którym do określenia położenia służą zmienne ρ, φ, z

Za współrzędną uogólnioną przyjmujemy współrzędną $q_1 = z$ przy czym ponieważ $\varphi(z = h) = 2\pi$

można przyjąć iż współrzędną φ jest równa $\varphi = \frac{2\pi z}{h}$ ($\dot{\varphi} = \frac{2\pi \dot{z}}{h}$) zaś współrzędną $\rho = a = \text{const}$ ($\dot{\rho} = 0$)

Rozważmy transformację współrzędnej uogólnionej daną wzorem $q_1 \rightarrow q_1^*(q_1, s) = q_1 + \delta q_1 = q_1 + \frac{\partial q_1^*}{\partial s}(s=0)s$

Z niezmienniczości działania Hamiltona względem powyższej transformacji wynika iż całką

ruchu jest wielkość $p_1 \frac{\partial q_1^*}{\partial s}(s=0) = p_1 \frac{\partial z^*}{\partial s}(s=0) = \text{const}$ przy czym ponieważ funkcja

Lagrange'a
$$L = T - V = \frac{m}{2}(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) - V = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V = \frac{m}{2}\left(a^2 \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2\right) - V(z)$$

to
$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = ma^2 \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \dot{z} + m\dot{z} = ma^2 \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left(\frac{h}{2\pi}\right) \dot{\varphi} + m\dot{z} = \left(\frac{2\pi}{h}\right) L_z + p_z$$

gdzie $L_z = ma^2 \dot{\varphi}$ - składowa z-owa momentu pędu, $p_z = m\dot{z}$ składowa z-owa pędu

W przypadku przesunięcia wzdłuż spirali na nieskończenie krótki odcinek następuje zmiana

współrzędnej uogólnionej $q_1 = z \rightarrow q_1^* = z + s$

Gdy transformacja omawiana nie prowadzi do zmiany działania Hamiltona to wielkością zachowaną

jest
$$p_1 = \left(\frac{2\pi}{h}\right) L_z + p_z$$

Twierdzenie Noether (wersja nieco uogólniona)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji

$$q_l(t) \rightarrow q_l^*(t) = q_l(t) + \delta q_l(t)$$

funkcjonał $I = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt$ dla dowolnych t_0, t_1 jest jej niezmiennikiem, tzn.

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) \equiv 0$$

i jeżeli funkcje $q_l(t)$ reprezentują ekstremale funkcjonału I , tj. spełniają równania Eulera – Lagrange’a, to

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l = \text{const} \quad (*)$$

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera – Lagrange’a dla pewnego funkcjonału I (zachodzi to zawsze dla działania Hamiltona) i jeżeli funkcjonal ten jest niezmiennikiem pewnej ciągłej grupy transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych wzorem (*)

Wariacja funkcji z wariacją czasu

Rozważmy zbiór funkcji postaci $t^*(t) = t + \Delta t(t) = t + \Delta t$ ← wariacja czasu

Wariacja z wariacją czasu
współrzędnej uogólnionej

$$\Delta q_l(t) = q_l^*(t^*) - q_l(t) = q_l^*(t + \Delta t) - q_l(t)$$

Rozważamy funkcjonal

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

i jego różnice w ruchu porównawczym z wariacją czasu i w ruchu rzeczywistym

$$I[q^*(t^*)] - I[q(t)] \approx \Delta I \quad \text{gdzie}$$

$$\Delta I \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\Delta F + F \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt, \quad \leftarrow \text{Wariacja z wariacją czasu funkcjonału } I[q]$$

$$\Delta F = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t. \quad \leftarrow \text{Wariacja z wariacją czasu funkcji } F$$

$$\Delta \dot{q}_l \equiv \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt}$$

W przybliżeniu zachodzi

$$\Delta q_l = \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t \quad \Delta \dot{q}_l = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t$$

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt$$

δq_l -wariacja bez wariacji czasu funkcji q_l

Twierdzenie Noether (wersja pełna)

Jeżeli dla pewnej ciągłej grupy transformacji

$$q_l(t) \rightarrow q_l^*(t^*) \cong q_l(t) + \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t, \quad t \rightarrow t^* = t + \Delta t(t)$$

funkcjonał $I = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt$ dla dowolnych t_0, t_1 jest jej niezmiennikiem, tzn.

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \equiv 0$$

i jeżeli funkcje $q_l(t)$ reprezentują ekstremale funkcyjonału I , tj. spełniają równania Eulera – Lagrange’a, to

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t = \text{const}} \quad (*)$$

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera – Lagrange’a dla pewnego funkcyjonału I (np. działania Hamiltona) i jeżeli funkcyjonał ten jest niezmiennikiem pewnej grupy ciągłych transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania wielkości określonych wzorem (*)

Rozważmy układ złożony z n punktów materialnych, funkcja F jest funkcją Lagrange'a, $F = L$.

Gdy działanie Hamiltona $W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_l, \dot{q}_l, t) dt$

jest niezmiennikiem transformacji $q_l(t) \rightarrow q_l^*(t^*) \cong q_l(t) + \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t$, $t \rightarrow t^* = t + \Delta t(t)$

to wielkość określona poniższym wzorem jest całką ruchu

$$\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) + L \Delta t = \text{const} \quad (*)$$

Niezmienniczość względem przesunięć w czasie

Rozważmy przesunięcie w czasie o $\delta\tau$. Wówczas $\Delta q_l = 0$ ($l = 1, \dots, f$), $\Delta t = \delta\tau$

$$\Delta q_l = \delta q_l + \dot{q}_l \Delta t \Rightarrow \delta q_l = -\dot{q}_l \delta\tau$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{l=1}^f -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \delta\tau + L \delta\tau = \left[\sum_{l=1}^f (-p_l \dot{q}_l) + L \right] \delta\tau = -G \delta\tau = \text{const} \Rightarrow$$

$\delta\tau$ dowolne
 $\downarrow$

$$\Rightarrow -G = \text{const} \Rightarrow$$

Zasada zachowania energii mechanicznej $E = T + V = G$
dla więzów niezależnych od czasu i sił potencjalnych

Zasada Maupertuis (dla osób zainteresowanych)

dla układu punktów materialnych o więzach holonomicznych, dwustronnych i skleronomicznych (energia kinetyczna nie zależy jawnie od czasu). Zasada

Maupertuis jest spełniona dla sił potencjalnych jak również dla sił niepotencjalnych

Dla ruchu rzeczywistego w każdym przedziale czasu (t_0, t_1) zachodzi

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l(t = t_0) = \Delta q_l(t = t_1) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, f$

$$\Delta T = \Delta A = \sum_{l=1}^f Q_l \Delta q_l \quad (*)$$

Wszystkie ruchy porównawcze zaczynają się i kończą w tym samym położeniu co ruch rzeczywisty ale w czasie, który może różnić się o nieskończenie małą wielkość w stosunku do czasu ruchu rzeczywistego

Przy czym jeżeli $T \neq 0$ w przedziale (t_0, t_1) , to powyższy warunek spełniony jest tylko dla ruchu rzeczywistego

Warunek (*) jest nałożony na wariację z wariacją czasu energii kinetycznej która określa zmianę energii kinetycznej układu przy przejściu od ruchu rzeczywistego do ruchu porównawczego z porównawczymi przebiegami czasowymi. Zmiana energii kinetycznej według warunku (*) musi być równa sumie prac wszystkich sił na przesunięciach wirtualnych zgodnych z więzami równych wariacjom z wariacją czasu współrzędnych uogólnionych.

Można wykazać, że warunek (*) gdy $T \neq 0$ nie nakłada żadnych ograniczeń na wariacje Δq_l , więc mogą być one dowolne.

Zasada Maupertuis dla układu punktów materialnych o więzach holonomicznych, dwustronnych i skleronomicznych na które działają siły potencjalne niezależne jawnie od czasu (zachowawcze)

W tym przypadku zachodzi $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$

$$\begin{aligned} \text{A zatem} \quad \Delta T = \Delta A &= \sum_{l=1}^f Q_l \Delta q_l = - \sum_{l=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_l} \Delta q_l = -\Delta V \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta T + \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta(T + V) = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \end{aligned}$$

Dodatkowy warunek na wariacje z wariacją czasu energii kinetycznej można zastąpić warunkiem na wariacje z czasem całkowitej energii układu, która musi być równa zero.

W przypadku zasady Hamiltona tym dodatkowym warunkiem było czyli znikanie wariacji czasu $\Delta t = 0$

Zasada Maupertuis

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l(t = t_0) = \Delta q_l(t = t_1) = 0$,

$$\Delta E = 0$$

Zasada Hamiltona

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l(t = t_0) = \Delta q_l(t = t_1) = 0$,

$$\Delta t = 0$$

Zasada Jacobiego dla układu punktów materialnych na które nałożono więzy skleronomiczne i na które działają siły zachowawcze ($E=\text{const}$, $V=V(q)$) gdy $T \neq 0$ (dla zainteresowanych)

Wiadomo iż
$$T = \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} T_{ij} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} = E - V \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, E = \text{const}$$

Np. dla pojedynczego punktu w układzie kartezjańskim

$$T = T_{xx} \dot{x}^2 + T_{yy} \dot{y}^2 + T_{zz} \dot{z}^2 \quad \text{gdzie} \quad T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \frac{m}{2}$$

A zatem
$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij} dq_i dq_j}{E - V}}$$

Zastępujemy dalej w zasadzie wariacyjnej Maupertuis całkowanie po czasie t całkowaniem po zmiennej ξ niepodlegającej wariacji parametryzującej tor punktu materialnego wykorzystując poniższą relację

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij} dq_i dq_j}{E - V}} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij} \frac{dq_i}{d\xi} \frac{dq_j}{d\xi}}{E - V}} d\xi = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} T_{ij} q'_i q'_j}{E - V}} d\xi \quad \text{gdzie} \quad q'_i = \frac{dq_i}{d\xi}$$

Z zasady Maupertuis'a wynika zasada Jacobiego w której wyeliminowano czas.

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0$$

gdzie $\Delta q_l(t = t_0) = \Delta q_l(t = t_1) = 0, \Rightarrow$

$$\Delta E = 0$$

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sqrt{(E - V) \sum_{i,j} T_{ij} q'_i q'_j} d\xi = 0$$

gdzie $\delta q_l(\xi = \xi_0) = \delta q_l(\xi = \xi_1) = 0, \Rightarrow$

E oznacza stałą wartość energii ciała $= T + V$

Dla pojedynczego punktu materialnego zmienną całkowania może być droga pokonana przez punkt w trakcie ruchu $\xi = s$

$$\sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2} = \frac{m}{2} \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = \frac{m}{2}$$

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\frac{m}{2} (E - V)} ds = 0 \Leftrightarrow \delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{(E - V)} ds = 0$$

$$\text{gdzie } \delta q_l(s = s_0) = \delta q_l(s = s_1) = 0$$

Porównanie zasady Jacobiego z zasadą Fermata (pozwalająca na określenie biegu promienia świetlnego w ramach optyki geometrycznej)

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{(E - V)} ds = 0$$

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} n(s) ds = 0$$

n -współczynnik załamania

Informacje dodatkowe dla zainteresowanych

Wariacja funkcji z wariacją czasu-wyprowadzenie wykorzystywanych wzorów

Rozważmy zbiór funkcji postaci

Wariacja z wariacją czasu

$$t^*(t) = t + \Delta t(t) = t + \Delta t$$

współrzędnej uogólnionej

$$\longrightarrow \Delta q_l(t) = q_l^*(t^*) - q_l(t) = q_l^*(t + \Delta t) - q_l(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta q_l(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} [q_l^*(t + \Delta t) - q_l(t)] = \dot{q}_l^*(t + \Delta t) \left(1 + \frac{d\Delta t}{dt} \right) - \dot{q}_l(t) \\ &= [\dot{q}_l^*(t + \Delta t) - \dot{q}_l(t)] \left(1 + \frac{d\Delta t}{dt} \right) + \dot{q}_l(t) \frac{d\Delta t}{dt} = \Delta \dot{q}_l + \dot{q}_l(t) \frac{d\Delta t}{dt} \end{aligned}$$

Będziemy rozpatrywać różnice wartości całki $I[q] = \int_{t_0}^{t_1} F(q(t), \dot{q}(t), t) dt$

w ruchu porównawczym z porównawczym przebiegiem czasu i w ruchu rzeczywistym

Niech $t = t(\tau)$, τ – parametr, nie ulega wariacji, $t_0 = t(\tau_0)$, $t_1 = t(\tau_1)$, $\frac{dt}{d\tau} > 0$

$$\text{Niech } t' \equiv \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow dt = t' d\tau, \quad q'_l \equiv \frac{dq_l}{d\tau} = \frac{dq_l}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{q}_l t' \Rightarrow \dot{q}_l = \frac{q'_l}{t'} \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(q, q'/t', t) t' d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \bar{F}(q, q', t, t') d\tau, \quad \bar{F}(q, q', t, t') \equiv F(q, q'/t', t) t'$$

t traktujemy jako niezależną od funkcji q_l
funkcje parametru τ

$$I[q] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \bar{F}(q, q', t, t') d\tau = \bar{I}[q, t]$$

Wariacja (bez wariacji parametru τ) całki $\bar{I}[q,t]$ równa w przybliżeniu

$$\bar{I}[q^*, t^*] - \bar{I}[q, t] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \bar{F}(q^*(t^*), q'^*(t^*), t^*, t'^*) - \bar{F}(q(t), q'(t), t, t') \right\} d\tau \quad \text{wynosi}$$

$$\delta \bar{I} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l} (q_l^*(t^*) - q_l(t)) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_l} (q'_l(t^*) - q'_l(t)) \right] + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} (t^* - t) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} (t'^* - t') \right\} d\tau$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_l} \Delta q'_l \right] + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} \Delta t' \right\} d\tau = \Delta I$$

gdzie $\Delta q'_l = q'_l(t^*) - q'_l(t) = \frac{d}{d\tau} [q'_l(t^*) - q'_l(t)] = \frac{d\Delta q_l}{d\tau} = \frac{d\Delta q_l}{dt} t'$

$$\Delta t' = t'^* - t' = \frac{d}{d\tau} [t^* - t] = \frac{d\Delta t}{d\tau} = \frac{d\Delta t}{dt} t'$$

$$\bar{F}(q, q', t, t') = F\left(q, \dot{q} = \frac{q'}{t'}, t\right) t' \Rightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_l} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q'_l} t' = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial (q'_l / t')}{\partial q'_l} t' = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{1}{t'} t' = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial t'} t' + F = \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial (q'_l / t')}{\partial t'} t' + F = - \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{q'_l}{(t')^2} t' + F =$$

$$= - \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{\dot{q}_l t'}{(t')^2} t' + F = - \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l + F$$

$$\bar{F}(q, q', t, t') = F\left(q, \dot{q} = \frac{q'}{t'}, t\right) t' \quad \Delta t' = t' \Delta t \quad \Delta q'_l = \frac{d\Delta q_l}{dt} t' \quad \Delta t' = \frac{d\Delta t}{dt} t' \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_l} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l}$$

$$\delta \bar{I} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial \bar{F}}{\partial q'_l} \Delta q'_l \right] + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} \Delta t' \right\} d\tau = \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial t'} = - \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l + F$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} t' \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} t' \right) + \frac{\partial F}{\partial t} t' \Delta t + \left[\left(- \sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \right) + F \right] \frac{d\Delta t}{dt} t' \right\} d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} \right) \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right\} t' d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt, \quad \text{gdzie} \quad \Delta \dot{q}_l \equiv \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} =$$

$$= (\dot{q}_l^*(t + \Delta t) - \dot{q}_l(t)) \left(1 + \frac{d\Delta t}{dt} \right) \approx$$

$$\Delta I \equiv \delta \bar{I} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\Delta F + F \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt,$$

Wariacja z wariacją czasu całki / [q]

$$\approx (\dot{q}_l^*(t + \Delta t) - \dot{q}_l(t))$$

gdzie $\Delta F = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t.$

wariacja z wariacją czasu prędkości uogólnionej

Wariacja z wariacją czasu funkcji F

Wyprowadzenie przybliżonych wzorów na wariacje funkcjonału z wariacją czasu wykorzystywanych przy formułowania twierdzenia Noether

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt$$

$$\Delta q_l = q_l^*(t + \Delta t) - q_l(t) \approx q_l^*(t) + \frac{\partial q_l}{\partial t} \Delta t - q_l(t) = \delta q_l(t) + \dot{q}_l \Delta t$$

$$\Delta \dot{q}_l = \frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \ddot{q}_l \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta I \approx \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l \Delta t + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\delta q_l(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \Delta t \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\delta q_l}{dt} \right) + \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) \Delta t + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{l=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l \right] + \frac{dF}{dt} \Delta t + F \frac{d\Delta t}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_l} \delta q_l + F \Delta t \right) \right] dt$$

Dowód zasady Maupertuis

polega on na wykazaniu jej równoważności z równaniami Lagrange'a II rodzaju.

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\Delta T + T \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta T + T \frac{d\Delta t}{dt} - \frac{1}{2} (\Delta T - \Delta A) \right] dt = \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \Delta A \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} + Q_l \Delta q_l \right) dt = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \left(\Delta \dot{q}_l + \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} \right) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right] dt = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left[\left(Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \Delta q_l + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \Delta q_l \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \Delta q_l \right] dt = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(Q_l - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \Delta q_l dt + \sum_{l=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \Delta q_l \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^f \left(Q_l - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial T}{\partial q_l} \right) \Delta q_l dt
 \end{aligned}$$

Implikacja w kierunku odwrotnym

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \rightarrow \Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \quad \Delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l$$

zachodzi również gdyż Δq_l są dowolne

Dowód , że warunek $\Delta T = \Delta A = \sum_{l=1}^f Q_l \Delta q_l$ nie nakłada żadnych ograniczeń na wariacje Δq , więc mogą być one dowolne.

$$\begin{aligned}
 \Delta T &= \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \Delta \dot{q}_l \right) = \\
 &= \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{d\Delta q_l}{dt} - \dot{q}_l \frac{d\Delta t}{dt} \right) \right) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \right) \frac{d\Delta t}{dt} = \\
 &= \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - 2T \frac{d\Delta t}{dt} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - \frac{d}{dt} (2T\Delta t) \\
 \Delta T &= \sum_{l=1}^f Q_l \Delta q_l \quad \longrightarrow \quad \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q_l} \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - \frac{d}{dt} (2T\Delta t) = \sum_{l=1}^f Q_l \Delta q_l \Rightarrow \\
 &\quad \sum_{l=1}^f \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - \frac{d}{dt} [2T\Delta t] = 0
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \left(\sum_{l=1}^f \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) - \frac{d}{dt} [2T\Delta t] \right) dt &= 0 \\
 \int_{t_0}^t \left(\sum_{l=1}^f \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) \right) dt - 2T(\Delta t(t) - \Delta t(t=t_0)) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta t(t) = \Delta t(t=t_0) + \frac{1}{2T} \int_{t_0}^t \left(\sum_{l=1}^f \left(\left(\frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \Delta q_l + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \frac{d\Delta q_l}{dt} \right) \right) dt$$

Równanie to gdy $T \neq 0$ narzuca warunek tylko na Δt a nie na narzuca warunku na Δq_l

Wyznaczenie toru ruchu punktu materialnego przy pomocy zasady Jacobiego w polu siły ciężkości

$$\delta \int_{\xi_0}^{\xi_1} J(q, q') d\xi = 0 \quad \text{gdzie} \quad J(q, q') = \sqrt{(E - V) \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j}$$

$$\delta q_l(\xi = \xi_0) = \delta q_l(\xi = \xi_1) = 0$$

Rozpatrujemy ruch ciała w płaszczyźnie $y=0$ z osią Oz ustawioną pionowo do góry od punktu $P=(0,0,0)$ do punktu $P_l=(x_l, 0, z_l)$. Rolę zmiennej ξ może pełnić zmienna x

$$\sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} (1 + z'^2)$$

Funkcja J przyjmuje postać

$$J = \sqrt{(E - mgz) \frac{m}{2} (1 + z'^2)}$$

Równanie Eulera –Lagrange’a dla zasady Jacobiego

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J}{\partial z'} \right) - \frac{\partial J}{\partial z} = 0$$

Ponieważ $\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \Rightarrow z' \frac{\partial J}{\partial z'} - J = \text{const} = A$

$$\begin{aligned}
J &= \sqrt{(E - mgz) \frac{m}{2} (1 + z'^2)} = \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right) (1 + z'^2)} \\
\frac{\partial J}{\partial z'} &= \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \frac{\left(\frac{E}{mg} - z\right) z'}{\sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right) (1 + z'^2)}} = \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \frac{\sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)} z'}{\sqrt{(1 + z'^2)}} \\
z' \frac{\partial J}{\partial z'} - J &= \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)} \left(\frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} - \sqrt{1 + z'^2} \right) = \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) \\
z' \frac{\partial J}{\partial z'} - J = A &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2 g}{2}} \sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) = A \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{E}{mg} - z\right)} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) = \sqrt{\frac{2}{m^2 g}} A \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{E}{mg} - z \right) \left(\frac{1}{1 + z'^2} \right) = \frac{2}{m^2 g} A^2 \Leftrightarrow \left(\frac{E}{mg} - z \right) \left(\frac{1}{1 + z'^2} \right) = B^2 \Leftrightarrow \left(\frac{E}{mg} - z \right) = B^2 (1 + z'^2)
\end{aligned}$$



$$B^2 = \frac{2}{m^2 g} A^2 = \text{const}$$

Znalezienie rozwiązania równania

$$\left(\frac{E}{mg} - z \right) = B^2 (1 + z'^2)$$

Poszukujemy rozwiązania równania w postaci paraboli $z(x) = ax^2 + bx + c$

$$z(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2ax + b$$

Po wstawieniu zapostulowanego rozwiązania do równania różniczkowego otrzymujemy

$$\left(\frac{E}{mg} - z \right) = B^2 (1 + z'^2) \Rightarrow \left(\frac{E}{mg} - ax^2 - bx - c \right) = B^2 (1 + 4a^2 x^2 + 4abx + b^2)$$

Równanie powyższe będzie spełnione dla dowolnego x gdy będą spełnione równania

$$-a = 4a^2 B^2 \Rightarrow 4aB^2 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4B^2} \Rightarrow B^2 = -\frac{1}{4a}$$

$$-b = 4abB^2$$

$$\frac{E}{mg} - c = B^2 (1 + b^2) \Rightarrow E = mg \left[c + B^2 (1 + b^2) \right] \Rightarrow E = mg \left[c - \frac{(1 + b^2)}{4a} \right]$$

Relacja $E = mg \left[c - \frac{(1 + b^2)}{4a} \right]$ pozwala na uzależnienie jednej ze stałych

a, b, c przez dwie pozostałe. Pozostałe stałe można wyznaczyć znając dwa punkty przez który przechodzi tor ruchu ciała

Zakładając iż wyrzut ciała nastąpił w punkcie $P_0=(x_0=0,y_0=0,z_0=0)$

musi być spełniona zależność $z(x=0)=0 \Rightarrow c=0$

$$z(x) = ax^2 + bx + c$$

$$E = -\frac{mg(1+b^2)}{4a} \Rightarrow a = -\frac{mg(1+b^2)}{4E}$$

$$E = mg \left[c - \frac{(1+b^2)}{4a} \right]$$

Stałą b można wyznaczyć z warunku

$$z(x=x_1)=z_1 \Rightarrow -\frac{mg(1+b^2)}{4E}x_1^2 + bx_1 = z_1 \Rightarrow -mg(1+b^2)x_1^2 + 4Ebx_1 - 4Ez_1 \Rightarrow$$

$$-mgx_1^2b^2 + 4Ex_1b - 4Ez_1 - mgx_1^2 = 0$$

$$b = \frac{-4Ex_1 \pm \sqrt{16E^2x_1^2 - 16Emgx_1^2z_1 - m^2g^2x_1^4}}{-2mgx_1^2} = \frac{4E \mp \sqrt{16E^2 - 16Emgz_1 - 4m^2g^2x_1^2}}{2mgx_1}$$

$$b = \frac{2E}{mgx_1} \pm \sqrt{\left(\frac{2E}{mgx_1}\right)^2 - \frac{4Ez_1}{mgx_1^2} - 1}$$

Istnieje parabola łącząca punkty P_0 i P_1 tylko wtedy gdy

$$\left(\frac{2E}{mgx_1}\right)^2 - \frac{4Ez_1}{mgx_1^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z_1 \leq \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$$

Gdy $z_1 = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez punkty P_0 i P_1 przechodzi jedna parabola

Warunek ten jest spełniony gdy punkt P_1 leży na paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$

Gdy $z_1 < \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez rozważane punkty przechodzą dwie parabole.

Warunek ten jest spełniony gdy punkt P_1 leży poniżej paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$

Gdy $z_1 > \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x_1^2$ to przez rozważane punkty nie przechodzi żadna parabola.

Warunek ten jest spełniony gdy punkt P_1 leży powyżej paraboli $z(x) = \frac{E}{mg} - \frac{mg}{4E}x^2$